

WWW.PNU-CLUB.COM
تعداد سوال: نسی -- تکمیلی -- تشریحی ۹

نام درس: آنالیز حقیقی ۱

WWW.PNU-CLUB.COM
زمان امتحان: نسی و تکمیلی -- نسیه تشریحی ۱۵۰ دقیقه

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی محض و کاربردی (کلیه گرایشها)

تعداد کل صفحات: ۲

کد درس: ۱۱۱۱۱۷۹

از ۹ سؤال زیر فقط به ۷ سؤال پاسخ دهید.

- مفاهیم زیر را تعریف کنید.
 - الف. یک توپولوژی در X
 - ب. یک σ - جبر در X ج. مجموعه‌های بورل X
 - د. یک اندازه مثبت روی یک σ - جبر و یک اندازه بورل روی X
 - ه. محافظ یک تابع در فضای توپولوژیک X
 - و. مجموعه‌های σ - فشرده و σ - متناهی در یک فضای توپولوژیک X
 - ز. فضاهای $L^p(\mu)$, $l^p(A)$, $L^\infty(\mu)$, $(1 \leq p < \infty)$
 - ح. فضای هیلبرت و فضای باناخ
 - ط. اگر A یک مجموعه دلخواه و $\varphi: A \rightarrow R^+$ ، منظور از $\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha)$ چیست؟
 - ی. فضای $C_0(X)$ برای فضای موضعا فشرده X
- فرض کنید m یک σ - جبر در X و Y یک فضای توپولوژیک و f تابعی از X به Y باشد. در اینصورت نشان دهید:
 - الف. اگر Ω گردایه تمام مجموعه‌های $E \subset Y$ باشد بطوریکه $f^{-1}(E) \in m$ ، آنگاه Ω یک σ - جبر در Y است.
 - ب. اگر f تابعی اندازه‌پذیر E یک مجموعه بورل در Y باشد، آنگاه $f^{-1}(E) \in m$.
- قضیه همگرایی یکنوایی لبگ را بیان و اثبات نمایید.
- فرض کنید $\{E_k\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه پذیر در X باشد به طوریکه: $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$ در اینصورت ثابت کنید تقریباً هر $x \in X$ ، در حداکثر تعدادی متناهی از E_k ها قرار دارد.
- صورت قضیه نمایش ریس (Riesz Representation) را فقط بیان کنید.
- ثابت کنید برای $1 \leq p < \infty$ ، $C_c(X)$ در $L^p(\mu)$ چگال است (X یک فضای هاسدورف به طور موضعی فشرده و μ یک اندازه است که در خواص قضیه نمایش ریس صدق می‌کند).
- اگر $p = \infty$ آنگاه متمم (کامل شده) $C_c(X)$ در $L^p(\mu)$ نسبت به نرم سوپریم چه فضایی است؟
- ثابت کنید اگر L یک تابعی خطی پیوسته بر فضای هیلبرت H باشد آنگاه عنصر منحصر بفردی مانند $y \in H$ هست که:

$$L(x) = (x, y) \quad (x \in H)$$

WWW.PNU-CLUB.COM
تعداد سوال: نسبی -- تکمیلی -- تشریحی ۹

نام درس: آنالیز حقیقی ۱

زمان امتحان: نسبی و تکمیلی -- نمره تشریحی ۱۵۰ نمره

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی محض و کاربردی (کلیه گرایشها)

تعداد کل صفحات: ۲

کد درس: ۱۱۱۱۱۷۹

۸. فرض کنید M یک زیرفضای خطی فضای نرمندار X بوده و $x_0 \in \overline{M}$. ثابت کنید اگر x_0 فقط اگر هیچ تابعی خطی کراندار مانند f بر X وجود نداشته باشد به طوری که برای هر $x \in M$ ، $f(x) = 0$ ولی $f(x_0) \neq 0$

۹. فرض کنید $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ و $g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ توابعی اندازه پذیر باشند. در اینصورت:

الف. ثابت کنید مجموعه‌های زیر اندازه پذیرند.

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}, \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$$

ب. ثابت کنید مجموعه نقاطی از یک فضای اندازه پذیر که در آنها یک دنباله از توابع حقیقی اندازه پذیر همگرا (به حدی متناهی) باشد، اندازه پذیر است.