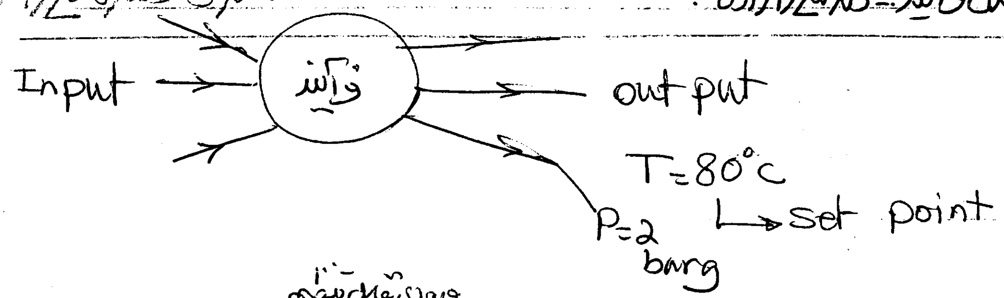
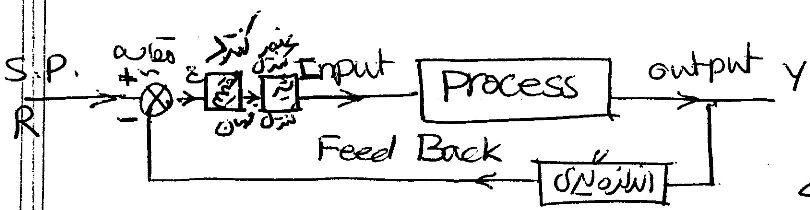
کنترل فرآیند - دکتر میرزازاده

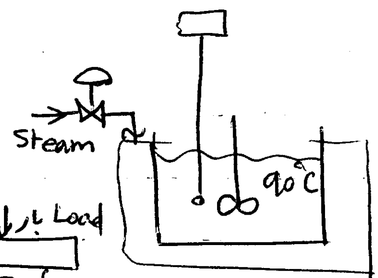


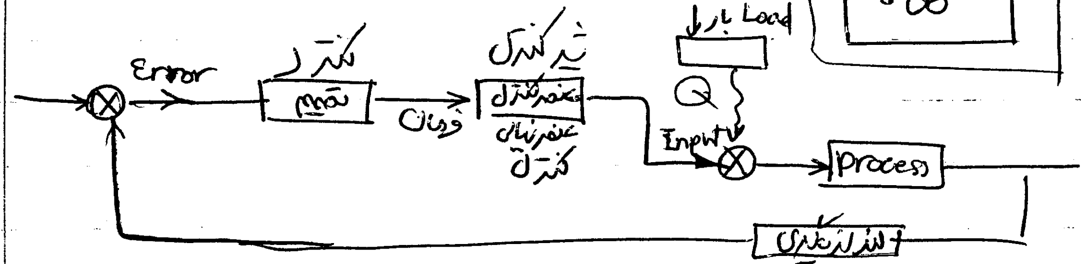
Input → Manipulated (ورودی قابل تنظیم) : { Flow → valve

Input → Disturbance (Load)

ورودی غیر قابل تنظیم ؛ مثال: دمای هوای محیط
اغتشاش

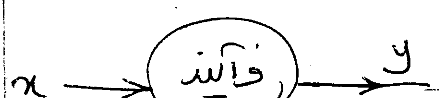






انتظار ما از این سیستم این است در اثر اغتشاشات و یا تغییراتی که دست ماست (تغییر set point) بصورت پایدار متغیرهای مورد نظر را کنترل کنند.

تمامی این blockها باید معین گردند:



$y = f(x)$ (؟) باید بدست آید ⟵ نوشتن موازنه

- نوشتن بیلان: Input − out + gen. = acc. ($\frac{d}{dt}$)
- رسیدن به معادله دیفرانسیل O.D.E. چون تغییرات تنها نسبت به زمان فقط داریم
- حل معادله دیفرانسیل به کمک تبدیلات لاپلاس.

نتیجه حل: دانستن ارتباط بین ورودی و خروجی.

تبدیلات لاپلاس :

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

تمام خواص انتگرال به لاپلاس منتقل می‌گردد : $\mathcal{L}\, a f(t) = a \mathcal{L} f(t)$ و ----

همه توابع تبدیل لاپلاس ندارند (شرایط انتگرال گرفتن)

مثال :

$f(t) = 1$

$$F(s) = \int_0^\infty 1 \times e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}$$

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$e^{\pm at} f(t)$	$F(s \mp a)$

مثال : $\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin 3t\} = \frac{3}{(s+2)^2+3^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\int_0^t f(t)\,dt$	$\frac{F(s)}{s}$

مثال:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin 3t\,dt\right\} = \frac{1}{s}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)$$

$f(t)$	$F(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

مثال:

$$\mathcal{L}\{t\sin 2t\} = (-1)^1 \times \left[\frac{2}{s^2+4}\right]' = -1 \times \frac{0 \times \text{مخرج} - 2s \times 2}{(\text{مخرج})^2}$$

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)\,ds$
$\frac{\sin 3t}{t}$	$\int_s^\infty \frac{3}{s^2+9}\,ds = \mathrm{ArcTg}(s/3)\Big|_s^\infty$

مثال:

لاپلاس مشتق:

$$f'(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\} = ?$$

$$\int \underbrace{f'(t)}_{v}\, \underbrace{e^{-st}}_{u}\, dt$$

$$= f(t)\cdot e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\,(-s)\,e^{-st}\,dt$$

$$= -f(0) + sF(s)$$

$$f''(t) \longrightarrow s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$f'''(t) \longrightarrow s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$f^{n}(t) \longrightarrow s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

حل معادله دیفرانسیل به کمک تبدیلات لاپلاس :

$$F(y^{(n)}, \dots, y', y, t) = 0$$

با لاپلاس گرفتن از معادله دیفرانسیل ، یک معادله جبری حاصل می‌گردد.

راه حل: ۱) از معادله دیفرانسیل لاپلاس می‌گیریم .

۲) $F(S)$ را بدست می‌آوریم . (یک معادله جبری) .

۳) از تابع $F(S)$ لاپلاس معکوس می‌گیریم .

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1} F(S)$$

$$x'' + 2x' + 3x = e^{-t} \quad \cancel{x(0)=} \qquad x(0) = x'(0) = 0$$

$$\Rightarrow s^2 X(s) - sX(0) - X'(0) \qquad sX(s) - X(0) \qquad X(s) \qquad X(s)$$

$$s^2 X(s) + 2s X(s) + 3X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+3)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \downarrow$$

$$x(t) = ?$$

* تبدیل لاپلاس برای معادلات دیفرانسیل خطی .
یعنی با لاپلاس گیری باید معادله جبری حاصل گردد .

لاپلاس معکوس گیری → از روی جدول

$$\frac{1}{s} \to 1$$

$$\frac{1}{s+1} \to e^{-t}$$

$$\frac{2}{s^3} \to t^2$$

→ تجزیه به توابعی که در جدول موجودند .

مثال :

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\downarrow \; A \qquad \mathcal{L}^{-1}\downarrow \; Be^{-t}$$

محاسبه A و B : طرفین $\times S$ ← $S=0$ ← $A=1$: محاسبه A

طرفین $\times (S+1)$ ← $S=-1$ ← $B=-1$: محاسبه B

مثال :
$$\frac{1}{S(S+1)^3}=\frac{A}{S}+\frac{B}{(S+1)^3}+\frac{C}{(S+1)^2}+\frac{D}{(S+1)}$$

محاسبه A و B :

$A \longrightarrow$ طرفین $\times S$ و $S=0 \longrightarrow A=1$

$B \longrightarrow$ " $\times (S+1)^3$ و $S=-1 \longrightarrow B=-1$

محاسبه C و D :

طرفین را در $(S+1)^3$ ضرب کرده سپس مشتق می‌گیریم و $S=-1$

$$\frac{1}{S}=\frac{A(S+1)^3}{S}+B+C(S+1)+D(S+1)^2$$

۰ چون پس از مشتق $S=-1$ قرار می‌دهیم.

مشتق گرفتن :
$$-\frac{1}{S^2}=0+0+C+D\times 0$$

چون B عدد ثابت بود با مشتق‌گیری حذف می‌گردد.

* توجه : فقط کافی است از سمت چپ معادله مشتق گرفت .

$C=-1$

محاسبه D :
$$\frac{2}{S^2}=\underset{\downarrow}{D(S+1)^2} \;\; 2D$$

راه حل کامل :

$$\frac{1}{S}=\frac{A}{S}(S+1)^3+B+C(S+1)+D(S+1)^2$$

مشتق
$$-\frac{1}{S^2}=F(S)\times(S+1)^2+0+C\times1+2D(S+1)$$

$$S=-1 \longrightarrow -1=0+0+C+0 \longrightarrow C=-1$$

مشتق
$$\frac{2}{S^3}=\varphi(S)\times(S+1)+0+0+2D$$

$$\frac{1}{S(S+1)^3}=\frac{A}{S}+\frac{B}{(S+1)^3}+\frac{C}{(S+1)^2}+\frac{D}{S+1}$$

$$\Longrightarrow x(t)=A+\frac{B}{2}t^2e^{-t}+Cte^{-t}+De^{-t}$$

$\frac{1}{S+1}$ لاپلاس معکوس $\longleftarrow$
$$=A+e^{-t}\left[\frac{B}{2}t^2+Ct+D\right]$$

(۴)

* وقتی که یک ریشه تکرار شود (همانند ریشه بتوان n باشد) لاپلاس معکوس آن می‌شود معکوس آن ریشه ضرب در یک چندجمله‌ای به توان n-1 .

در این مثال n=3 است .

مثال :

$$x(s)=\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{a+bi}{s+i}+\frac{a-bi}{s-i}$$

وقتی یکی از ریشه مختلط است ثابت مربوطه هم باید عدد مختلط باشد تا i در معادله باقی نماند.

هر عدد مختلط که ریشه معادله است مزدوج آن نیز ریشه معادله است و ثابت‌های آنها نیز مزدوج یکدیگر هستند.

روش مانند قبل:

$A \longrightarrow$ طرفین $\times s$ ، $s=0$

$a+bi \longrightarrow$ طرفین $\times (s+i)$ ، $s=-i$

ضرایب i و اعداد ثابت با هم متحد هستند ← a و b بدست می‌آیند.

$$x(t)=A+(a+bi)e^{-it}+(a-bi)e^{it}$$

$$e^{\pm i\theta}=\cos\theta \pm i\sin\theta$$

* در کنکور و کشور احتیاج به حساب کردن ثوابت نیست.

یعنی بدون حل باید جواب داد.

حالت کلی :

$$x(s)=\frac{1}{(s+k_1+ik_2)(s+k_1-ik_2)}=$$

$$=\frac{a+bi}{s+k_1+ik_2}+\frac{a-bi}{s+k_1-ik_2}$$

ریشه فرعی

$$x(t)=(a+bi)e^{-[k_1+ik_2]t}+(a-bi)e^{-(k_1-ik_2)t}$$

یا

$$e^{-k_1t}\times e^{-ik_2t}$$

$$\hookrightarrow \cos k_2t-i\sin k_2t$$

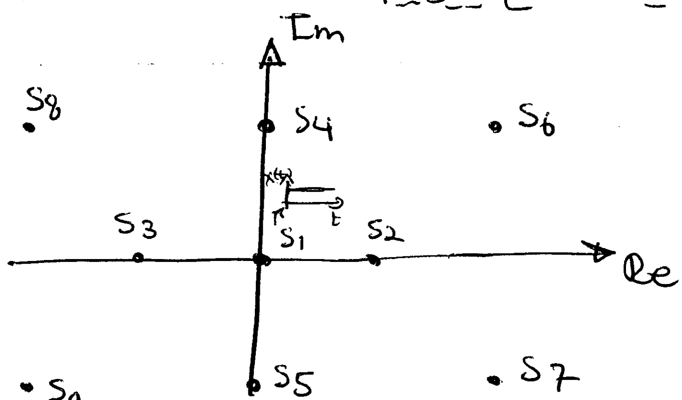
جواب نهایی :

$$X(t)=2e^{-k_1t}\left[a\cos k_2t+b\sin k_2t\right]$$

آنالیز کیفی ریشه‌ها :

$$\frac{1}{(S+k_1+ik_2)} \longrightarrow S=-[k_1+ik_2]$$

با دیدن تابع transfer رفتار سیستم را می‌خواهیم تعیین کنیم.

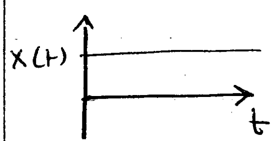


S_4 و S_5 باهم هستند.
S_6 و S_7 " "
S_8 و S_9 " "

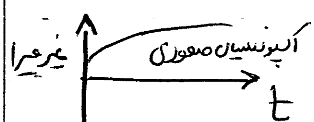
۹ مکان برای ریشه امکان‌پذیر است.
و ۶ حالت کلی.

$$S=-[k_1\pm ik_2]$$

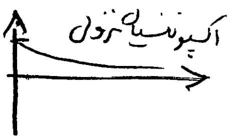
S_1 : $0=k_1=k_2 \longleftarrow x(t)=A$



S_2 : $0=k_2$ و $k_1<0 \longleftarrow$



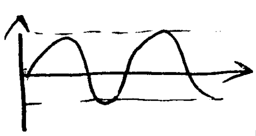
S_3 : $0=k_2$ و $k_1>0 \longleftarrow$



میرا (اثر ریشه در طول زمان از بین می‌رود).

S_4 و S_5 : $k_1=0$.

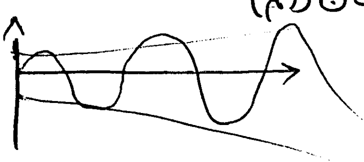
نوسانی با دامنه ثابت (نوسان دائم)



S_6 و S_7 : $\boxed{k_1\neq 0 , <0}$ و $\boxed{k_2\neq 0}$

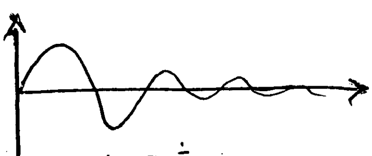
مثال : $\frac{1}{(s-1+i)}$

نوسانی با دامنه افزاینده با زمان.



S_8 و S_9 : $\boxed{k_1\neq 0 , >0}$ $\boxed{k_2\neq 0}$

نوسانی با دامنه کاهنده



صفر : ثابت با زمان
+ :
- :

* علامت قسمت حقیقی ریشه تعیین‌کننده میرا بودن یا غیرمیرا بودن پاسخ است.
* داشتن جزء موهومی معرف نوسانی بودن سیستم است و نداشتن آن بالعکس.

$$f(s)=\frac{1}{s(s^2+1)(s^2+s+1)}$$

رفتار پاسخ این سیستم پس از رفتار طولانی به چه شکلی است؟

* به هیچ وجه لاپلاس معکوس نمی‌گیریم:

موهومی ندارد ← غیر نوسانی
حقیقی = صفر ← عدد ثابت

$(s-i)(s+i)$
حقیقی ندارد
پس نوسان دائم

$s=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ← نوسانی

قسمت حقیقی منفی: نزولی (میرا)
قسمت موهومی $\neq 0$: نوسانی
⇐ نوسانات میرا

بنابراین پس از زمان طولانی: نوسانات میرا از بین رفته.
عدد ثابت + نوسان دائم ⇐ نوسان با دامنه ثابت.

$$\frac{1}{s^2+2s+3}=0 \longrightarrow s=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=-1\pm\sqrt{2}\,i$$

میرا
اگر + بود نمایی
موهومی داشت
اگر نداشت غیر نوسانی

بحث پایداری: آیا سیستم در سمت راست محور موهومی ریشه‌ای دارد یا خیر؟ اگر داشت ناپایدار است.
تابع انتقال

قضایای تبدیل لاپلاس:

سه قضیه داریم:

۱) قضیه مقدار نهایی:

$\lim_{t\to\infty} f(t)=?$ ، $f(s)$ را داریم

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)}$$

مثال:

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+1)}$$

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+2s+1}=1$$

۲) قضیه مقدار اولیه

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

در مثال قبل :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 0$$

۳) قضیه تابع انتقال یافته Transfered Function (؟)

$$\mathcal{L}\, f(t-t_0) = ?$$

مثال: $\mathcal{L}\, e^{-(t-1)} = ?$

$$e^{-t} = f(t)$$

$$e^{-(t-1)} = f(t-1)$$

اثبات از تعریف :

$$\int f(t-t_0)e^{-st}\,dt$$

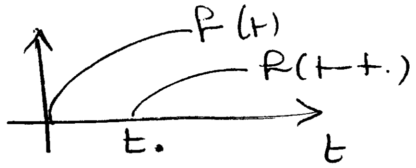
تغییر متغیر $t-t_0$:

جواب نهایی :

چون علامت‌ها * ولی در $e^{\pm at}$ جای ± عوض نمی‌شود.

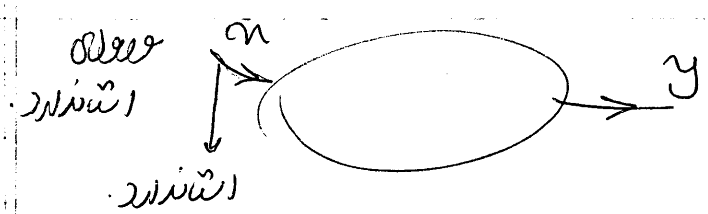
$$\mathcal{L}\, f(t-t_0) = e^{-st_0}F(s)$$

$$\mathcal{L}\, e^{-(t-1)} = \frac{1}{s+1}e^{-s} \longrightarrow \text{چون } t_0=1$$

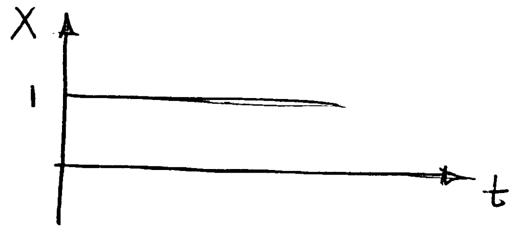


$f(t)$ با تأخیر است

ورودی‌های استاندارد



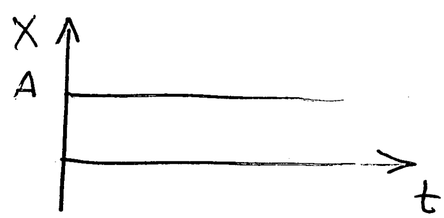
۱) ورودی پله‌ای.



ورودی پله‌ای واحد

$$x(t)=u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

ورودی پله‌ای



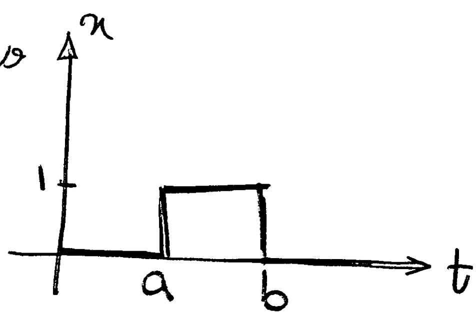
$$x(t)=Au(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ A & t>0\end{cases}$$

$$x(t)=1 \longrightarrow X(s)=\frac{1}{s}$$

$$x(t)=A \longrightarrow X(s)=\frac{A}{s}$$

۲) ورودی پالسی

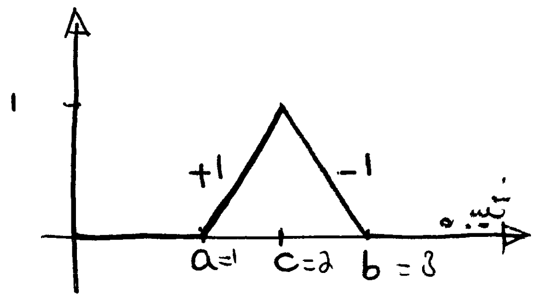
ورودی پالسی.



$$x(t)=\begin{cases}0 & \cancel{a<t<b}\ \ t<a\\ 1 & a<t<b\\ 0 & b<t\end{cases}$$

$$x(t)=u(t-a)-u(t-b)$$

$$X(s)=e^{-as}\frac{1}{s}-\frac{e^{-bs}}{s}$$



$$(\text{شیب})\underbrace{(t-a)}_{\text{شروع}}\underbrace{u(t-a)}_{\text{برای صفر کردن قبل از } a}+\dots$$

بخاطر خطی بودن.

$$1\times(t-1)u(t-1)-2(t-2)u(t-2)$$

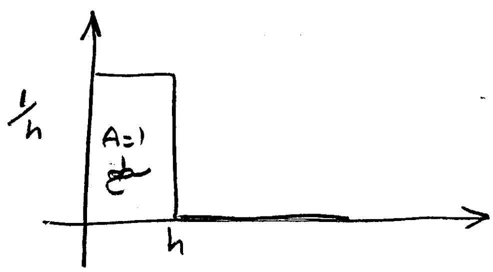
شیب جدید = شیب قبلی + ◯

$$+1(t-3)u(t-3)$$

شیب جدید = ۰ = شیب قبلی + ◯

-1

۳) ورودی ضربانی

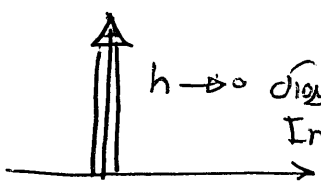


$$x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{h} & 0<t<h\\ 0 & h<t\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{1}{h}u(t)-\frac{1}{h}u(t-h)$$

$$X(S)=\frac{1}{hs}-\frac{e^{-hs}}{hs}=\frac{1-e^{-hs}}{hs}$$

اگر $h\to 0$



$h\to 0$ ضربان ایمپالس Impulse.

$h\to 0 \quad x(t)=\delta(t)$ ضربان ایمپالس

در لحظه غیر صفر: $x(t)=\delta(t-t_0)$

$$x(S)=\lim_{h\to 0} x(S)_{\text{قبلی}}=\frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\overset{\text{هوپیتال}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{+Se^{-hs}}{S}=1$$

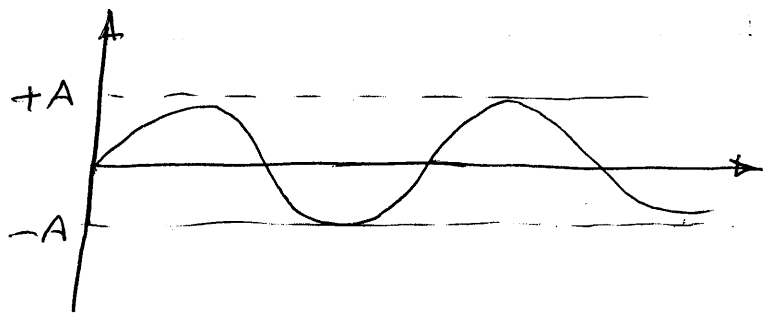
$$F(s) = s = s \times \underbrace{1}_{\delta(s)}$$

$$F(t) = ?\qquad F(t) = \frac{d\,\delta(t)}{dt}$$

$$F(s) = as + b$$

$$F(t) = a\frac{d\delta}{dt} + b\,\delta(t)$$

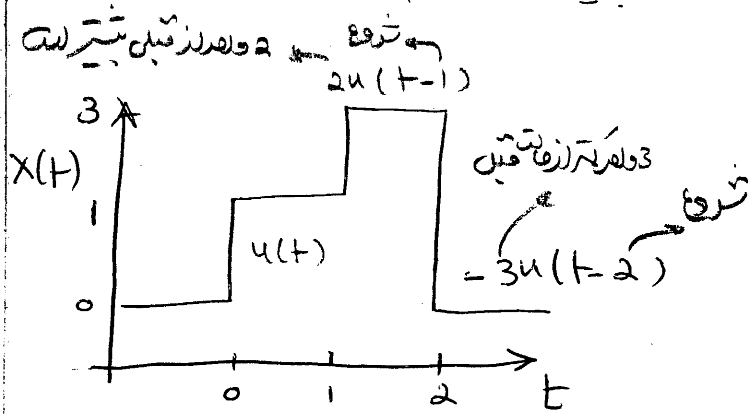
۴) ورودی نوسانی



$$X(t) = A\sin(\omega t)$$

$$X(s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

توابع را می‌توان به شکل توابع sin ، cos نوشت. یعنی این ورودی بقیه را در بر می‌گیرد سیستمی که به ورودی سینوسی پایدار است به سایر ورودی‌ها پایدار است. (؟) —



$$x(t) = u(t) + 2u(t-1) - 3u(t-2)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{3e^{-2s}}{s}$$

$$= \frac{1}{s}\left[1 + 2e^{-s} - 3e^{-2s}\right]$$

مثال:

$$F(S)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-3s}}{s}$$

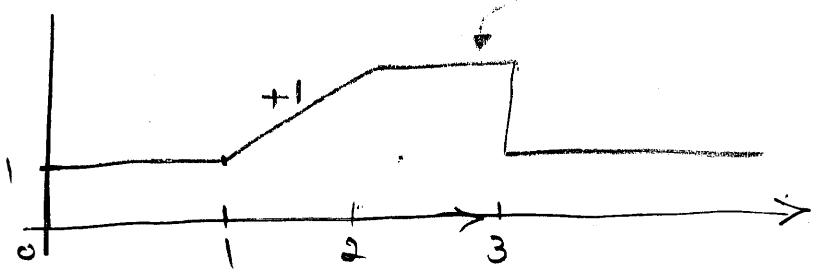
$$=\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-3s}}{s}$$

$$x(t)=u(t)+1\times(t-1)u(t-1)+\cancel{(t-}(-1)(t-2)u(t-2)$$

شیب   شروع

$$-u(t-3)$$

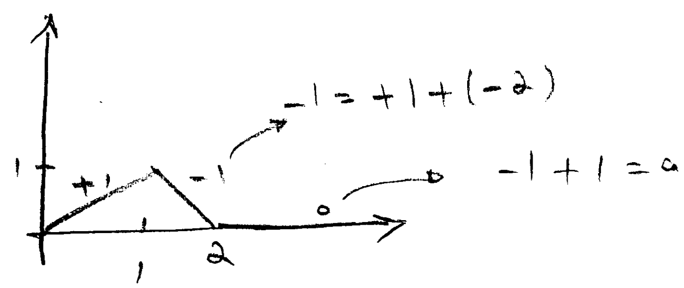
$1+(-1)=0$ شیب



مثال:

$$F(S)=\frac{1}{s^2}-\frac{2e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$tu(t)$ $-2(t-1)u(t-1)$ $+(t-2)u(t-2)$



مثال:

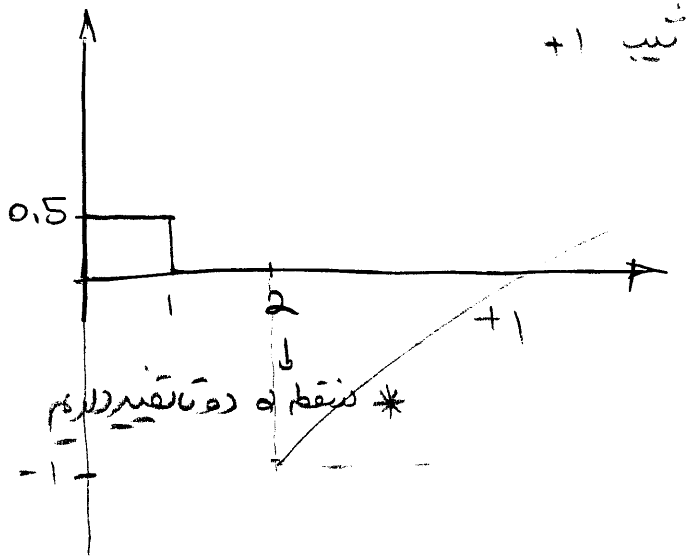
$$F(t)=0.5u(t)-0.5u(t-1)+\underbrace{(t-3)u(t-2)}_{\neq R(t-2)}$$

$$F(t)=0.5u(t)-0.5u(t-1)+(t-2-1)\,u(t-2)$$

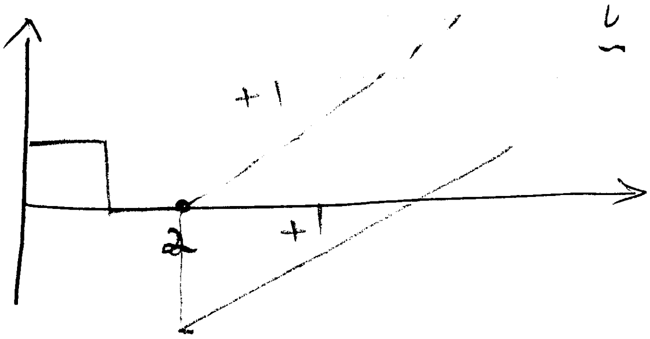
$$= \cdots\cdots + \underbrace{(t-2)u(t-2)}_{\text{که در } t=2 \text{ با شیب } +1} - \underbrace{u(t-2)}_{\text{می‌گوید در } t=2 \text{ یک پله باید پایین بیاید.}}$$

یا

هر دو تفسیر =

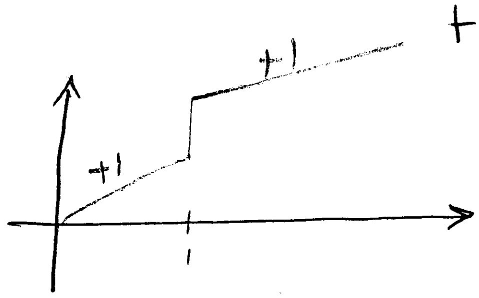


یا

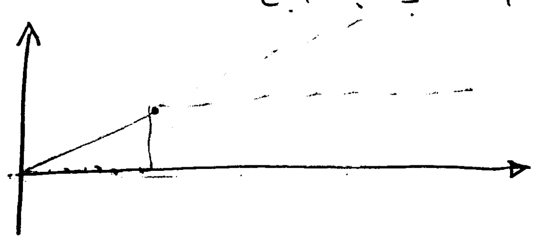


مثال: $\underbrace{tu(t)+u(t-1)}$

در نقطه یک هم تابع قبلی یک واحد بالا می‌رود.



* برای یادگیری اولیه می‌توان توابع را جدا جدا رسم کرد و بعد با هم جمع کرد.



$(t-2)u(t-2)$ یعنی تابع $t\,u(t)$ که از نقطه ۲ شروع شده.

توجه: شیب جدید = شیب + شیب قبلی.

تمرین:
$$F(S) = \frac{3}{s^2} - \frac{3e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

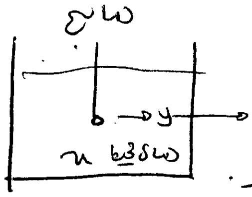
شکل $F(t)$ رسم گردد.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{فرآیند}} \longrightarrow y(t)$$

گام اول: ۱) شناخت فرآیند.
۱) بیلان
۲) معادله دیفرانسیل
۳) حل معادله به کمک تبدیل لاپلاس.
۴) $y = F(x)$

سیستم‌های درجه اول:

مثال: دماسنج



دمایی که دماسنج نشان می‌دهد.

$$\text{Input} - \text{output} + \text{gen.} = \text{Acc.}$$

$$h(x-y)A - 0 + 0 = mC_p \frac{\partial y}{\partial t}$$

سطح جانبی حباب دماسنج

$$x - y = \frac{mC_p}{hA}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{mC_p}{hA} * \frac{dy}{dt} + y = x$$

بعد $\frac{mC_p}{hA}$ بعد زمان دارد. $\Longrightarrow$

$$\boxed{\tau \frac{dy}{dt} + y = x}$$

* توجه ضریب $y = 1$ است.
← برای بدست آوردن τ توجه شود.

سیستم درجه اول سیستمی است که در معادله دیفرانسیل آن مشتق از مرتبه اول باشد (بالاترین مرتبه مشتق یک باشد).

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = x$$

$$\tau \left[sY(s) - y(0) \right] + Y(s) = X(s)$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} x - y = \dfrac{mC_p}{hA} \dfrac{dy}{dt} \\ x_s - y_s = 0 \end{array} \right.$$

$$X - Y = \tau \frac{dY}{dT}$$

$Y = y - y_s$

$X = x - x_s$

به طور کلی در سیستم تا احتیاج به دانستن مقادیر در لحظه صفر نباشد متغیرها را انحرافی نمایش می‌دهند.

$$\tau s Y(s) + Y(s) = X(s)$$

سیستم درجه اول:

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}}$$

در نتیجه:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{\tau s+1}} \longrightarrow Y(s)$$

$$\underbrace{\tau}_{\text{ثابت زمانی}} \frac{dY}{dt} + Y = \underbrace{K}_{\text{بهره حالت پایدار}} X$$

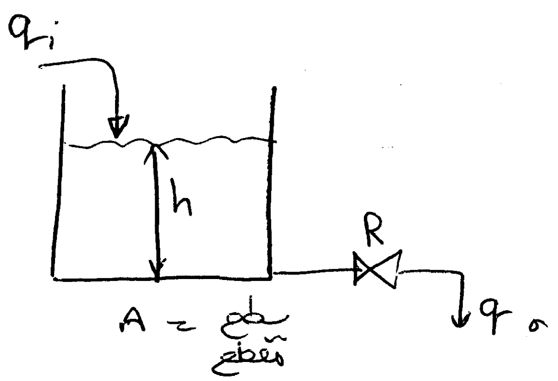
Steady state gain.

بهره : نسبت ورودی به خروجی در حالت پایدار.

مثال : بهره دماسنج یک است.

ثابت زمانی : زمانیکه سیستم در آن زمان 63.2% مقدار نهایی می رسد.

<u>مثال : سیستم سطح مایع</u>



اگر شیر خطی باشد.

$$q_o = \frac{h}{R}$$

$$\rho = cte \longrightarrow \text{بیلان حجم} = \text{بیلان جرم}$$

$$\begin{cases} q_i - q_o = A\dfrac{dh}{dt} \\ q_{is} - q_{os} = 0 \end{cases}$$

$$Q_i - Q_o = A\frac{dH}{dt}$$

$$Q_i - \frac{H}{R} = A\frac{dH}{dt}$$

$$\underbrace{RA}_{\tau}\frac{dH}{dt} + H = \underbrace{RQ_i}_{K}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{H(S)}{Q_i(S)} = \frac{R}{RAS+1}}$$

سیستم درجه اول.

$$Q_i(S) \longrightarrow \boxed{\frac{R}{\tau S+1}} \longrightarrow H(S)$$

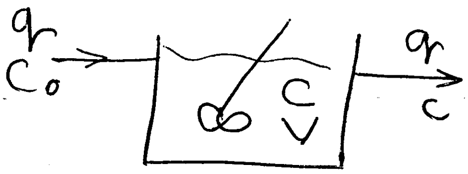
$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = ?$$

$$\frac{R\,Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RAs+1}$$

$$\frac{Q_o}{Q_i} = \frac{1}{\tau s+1}$$

در حالت steady
در ضرب ورودی یک می‌شود
$K=1$

مثال ۳: مخزن اختلاط



$\rho = cte$

$$qC_o - qC = V\frac{dC}{dt}$$

$$qC_{os} - qC_s = V\frac{dC}{dt}$$

$$qC_o - qC = V\frac{dC}{dt}$$

$$C_o = C + \frac{V}{q}\frac{dC}{dt}$$

$$\tau_p = V/q \quad و \quad k_p = 1$$

Process

* توجه: دیگر لاپلاس نمی‌گیریم و به فرم کلی می‌نویسیم.

$$\frac{C(s)}{C_o(s)} = \frac{1}{\tau s+1}$$

زمان پرشدن مخزن (اقامت) $\tau = V/q$ حجم / دبی حجم

مقاومت $= R$

ظرفیت $= C$

$\tau = RC$

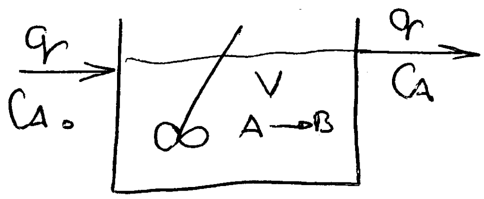
ظرفیت × مقاومت

$$R = \frac{\text{نیروی محرکه } V}{\text{جریان } I}$$

$$\underset{\text{ظرفیت}}{C} = \frac{\text{ذخیره}}{\text{نیروی محرکه}}$$

	نیروی محرکه	جریان	مقاومت	ذخیره	ظرفیت	τ
مدار الکتریکی	V	I	R	q	C	RC
سطح مایع	h	q	$R = h/q$	Ah	$\frac{Ah}{h} = A$	RA
دما سنج	ΔT	$hA\Delta T$	$1/hA$	$mc_p\Delta T$	mc_p	$\frac{mc_p}{hA}$
تانک اختلاط	ΔC	qC	$1/q$ (نوع سوال نشود)	VC	V	V/q

مثال:



$$-r_A = kC_A$$

In − out + gen

$$qC_{A_0} - qC_A - VkC_A = V\frac{dC_A}{dt}$$

$$C_{A_0} - C_A - \frac{Vk}{q}C_A = \frac{V}{q}\frac{dC_A}{dt}$$

$$C_{A_0} = \left(1 + \frac{Vk}{q}\right)C_A + \frac{V}{q}\frac{dC_A}{dt}$$

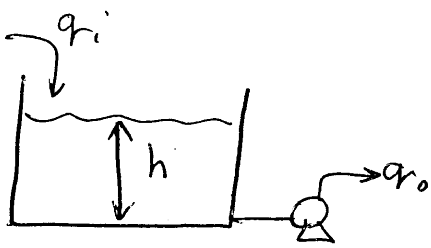
$$\underbrace{\frac{1}{1+\frac{Vk}{q}}}_{K_p}C_{A_0} = C_A + \underbrace{\frac{V/q}{1+Vk/q}}_{\tau_p}\frac{dC_A}{dt}$$

اگر زمان پر شدن یک راکتور T_{mixed} باشد و درون راکتور واکنش درجه اول انجام شود ثابت زمانی برابر است با:

$$T = V/q$$

$$\tau = \frac{T}{1+kT} \quad (؟)$$

جلسه سوم



ویژگی پمپ: عبور دبی ثابت که ارتباطی به ارتفاع تانک ندارد

$$q_o \neq \frac{h}{R}$$

$$q_i - q_o = A\frac{dh}{dt}$$
$$q_{is} - q_{os} = 0$$
$$Q_i - 0 = A\frac{dH}{dt}$$

$$Q_i(S) = ASH(S)$$

$$\frac{H(S)}{Q_i(S)} = \frac{1}{AS}$$ عامل انتگرال (انتگراتور)

اگر مقاومت داشتیم (R: شیر) $\rightarrow \frac{H}{Q_i(S)} = \frac{R}{RAS+1}$

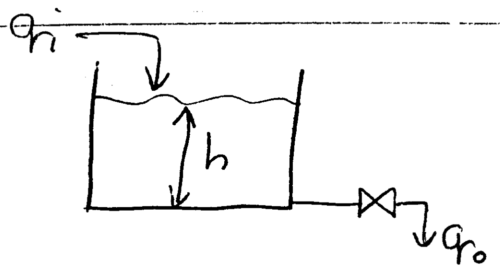
این سیستم نیاز به عامل انتگراتور ندارد چون $\frac{1}{s}$ را در تابع Transfer دارد بنابراین برای آن PD مناسب است نه PI.

* در هر تانک اگر در یک خروجی پمپ بگذارند تابع Transfer آن تانک را به صورت $\frac{1}{AS}$ در نظر میگیریم.

خطی کردن:

* چون در معادله یک hs خطی کردم، توابع بدست آمده زمانی که تغییرات ارتفاع از خیلی hs دور نیست قابل استفاده است.

مثال :



ممکن است رابطه q_o با h غیرخطی باشد :

$q_o = C\sqrt{h}$ یا ...

$q_o = f(h)$ غیرخطی .

$$q_i - q_o = A\frac{dh}{dt}$$
$$q_{is} - q_{os} = 0$$
$$Q_i - [C\sqrt{h} - C\sqrt{h_s}] = A\frac{dH}{dt}$$

$$\mathcal{L}\sqrt{f(H)} = ?$$

* نمی‌توانیم لاپلاس بگیریم مگر به صورت خطی درآوریم .

خطی کردن :

$$f(x) = f(x_s) + (x - x_s) f'(x_s) + \dots$$

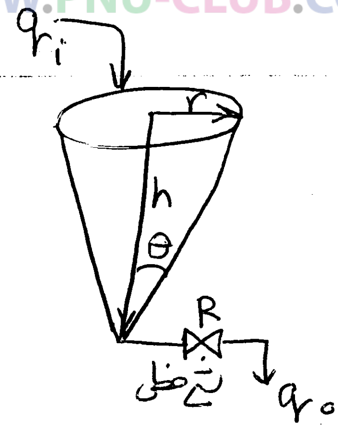
$$C\sqrt{h} = C\sqrt{h_s} + (h - h_s)\frac{C}{2\sqrt{h_s}}$$

$$C\sqrt{h} - C\sqrt{h_s} = H \times \frac{C}{2\sqrt{h_s}}$$

$$Q_i - \underbrace{\frac{C}{2\sqrt{h_s}} H}_{\frac{H}{R}} = A\frac{dH}{dt}$$

تبدیل لاپلاس نمی‌گیریم تشبیه سازی با مسائل می‌کنیم .

$$\Longrightarrow \frac{C}{2\sqrt{h_s}} = \frac{1}{R} \longrightarrow \boxed{R = \frac{2\sqrt{h_s}}{C}}$$ مقاومت خطی شده .



مثال :

$$q_i - q_o = \frac{dV}{dt}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$\cancel{r = h\cot\theta}$ $\quad r = h\tan\theta$

چون می‌خواهیم h را کنترل کنیم r را برحسب h می‌نویسیم.

$$q_i - q_o = \frac{dV}{dt}$$

$$q_i - \frac{h}{R} = \frac{\pi}{3}\tan^2\theta\,\frac{dh^3}{dt}$$

$$h^3 = h_s^3 + (h - h_s)\,3h_s^2$$

$$q_i - \frac{h}{R} = \frac{\pi\tan^2\theta}{3}\,\frac{d(h^3 - h_s^3)}{dt}$$

$$q_i - \frac{h}{R} = \underbrace{\frac{\pi\tan^2\theta}{3}\,3h_s^2}_{}\,\frac{dH}{dt}$$

A خطی شده است.

$$A = \pi h_s^2 \tan^2\theta$$

راه دوم :

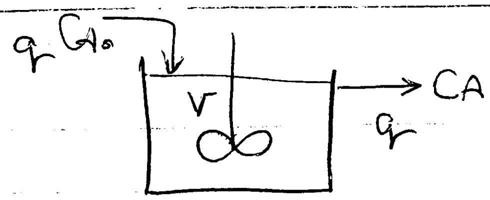
$$f(x) - f(x_s) = \underbrace{(x - x_s)}_{}\, f'(x_s)$$

متغیر انحرافی × مشتق

بنابراین همواره بجای جمله غیرخطی متغیر انحرافی ضربدر مشتق را قرار می‌دهیم.

$\cancel{Q_i}$

مثال :



$A \longrightarrow B$

$-r_A = kC_A^2$

$$qC_{A0} - qC_A - V(r_A) = V\frac{dC_A}{dt}$$

$$\cancel{q}C_{A0} - \cancel{q}C_A - \frac{V}{q}\underbrace{(kC_A^2)}_{\text{خطی شده}} = \frac{V}{q}\frac{dC_A}{dt}$$

$$C_{A0} - C_A - \frac{Vk}{q}(2C_{As})C_A = \frac{V}{q}\frac{dC_A}{dt}$$

اگر ضریب یک شود

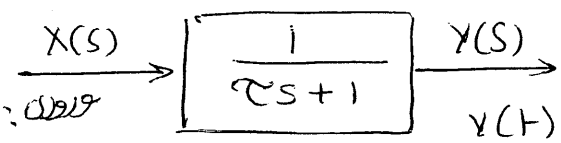
: K_p, τ $\qquad 1 - \left[1 + \frac{Vk(2C_{As})}{q}\right]C_A = \frac{V}{q}\frac{dC_A}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{V/q}{1 + \frac{V2C_{As}k}{q}}$$

$$K_p = \frac{1}{1 + \frac{V}{q}2kC_{As}}$$

سیستم درجه اول :

$$\frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{\tau S + 1}$$



$y(t) = ?$

ورودی :

۱) پله ای

۲) ضربانی

۳) سینوسی

$x(t) = u(t)$

$= \delta(t)$

$= A\sin\omega t$

پاسخ سیستم درجه اول به ورودیهای بالا چه شکلی دارد؟

پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی‌های استاندارد:

۱) ورودی پله‌ای:

$$x(t) = u(t)$$
$$X(s) = \frac{1}{s}$$

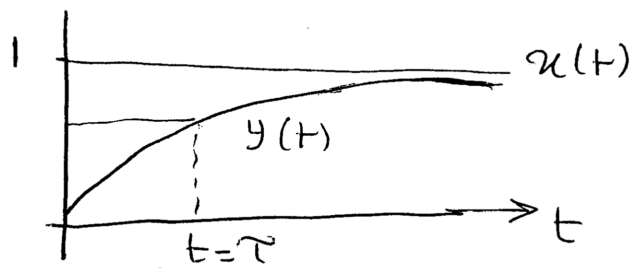
$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\tau s+1}$$
$$= \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{\underbrace{\tau s+1}_{\frac{1}{\tau}\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}}$$

$$* s \ \& \ s=0 \longrightarrow C_1 = 1$$
$$* (\tau s+1) \ \& \ s=-\frac{1}{\tau} \longrightarrow C_2 = -\tau$$

$$\Rightarrow Y(t) = 1 - \frac{\tau}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{y(t) = 1 - e^{-t/\tau}}$$

$Y(t)=1-e^{-1}=0.623$



پس از گذشت یک ثابت زمانی

ثابت زمانی: زمانی است که سیستم به 63.2٪ مقدار نهایی اش برسد.

پله غیر واحد :

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_p}{\tau s+1}$$

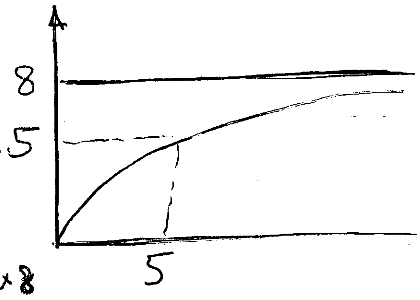
$$x(t) = A\,u(t)$$

$$X(s) = \frac{A}{s}$$

$$\longrightarrow \quad y(t) = AK_p\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

$$\boxed{\underset{t\to\infty}{\text{مقدار نهایی}} = AK_p}$$

تست : پاسخ یک سیستم درجه اول به یک ورودی پله ای به اندازه 3 واحد مطابق شکل زیر است تابع انتقال سیستم را مشخص کنید .



$\simeq .632\times 8$

$\tau = 5$

$$Y(s) = \frac{A}{s}\cdot\frac{K}{\tau s+1}$$

$$\text{مقدار نهایی} = AK = 8$$

$$A = 3 \longrightarrow K = \frac{8}{3}$$

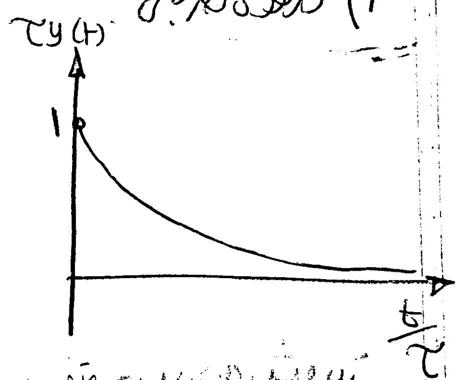
$$\boxed{G(s) = \frac{8/3}{5s+1}}$$

۲) ورودی ضربانی

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\tau s+1}} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$y(s) = 1 \times \frac{1}{\tau s+1}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau}}$$

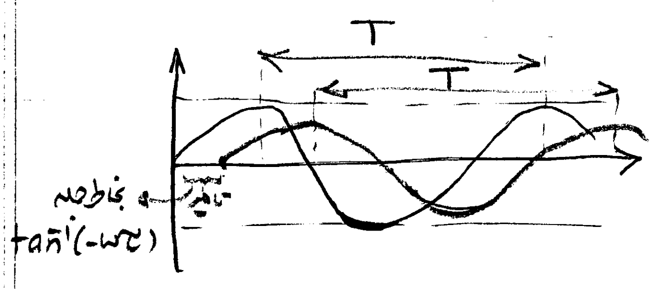


یک جهش اولیه سپس متغیر به مقدار اولیه باز می گردد

$$\begin{cases} x(t) = A\delta(t) \\ G(s) = \dfrac{k}{\tau s+1} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\tau y(t)}{Ak} = e^{-t/\tau}}$$

۳) ورودی سینوسی :



$$x(t) = A\sin(\omega t)$$

$$X(s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$Y(s) = \frac{A\omega}{(s^2+\omega^2)(\tau s+1)}$$

$\pm i\omega$ ← نوسانات بدون کاهش دامنه

← با $a \pm bi$ فرق دارد

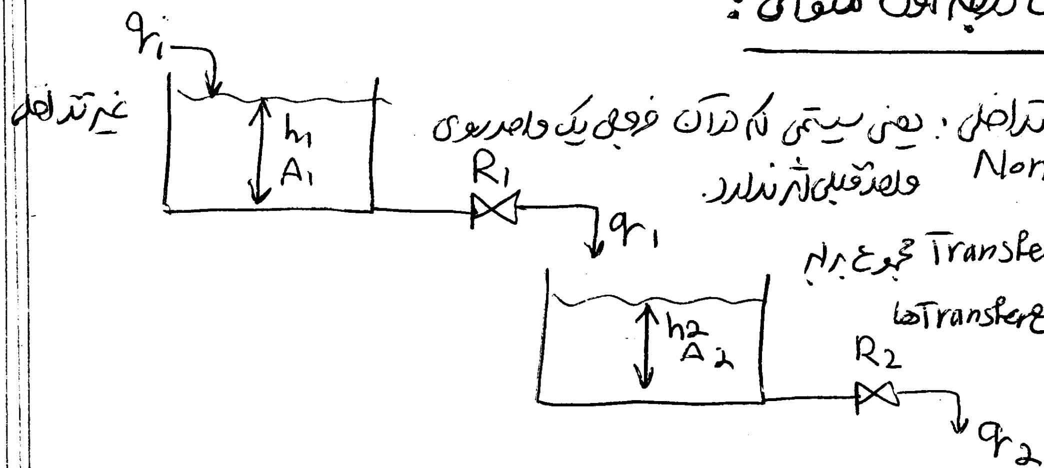
$s = -1/\tau$ ها

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} A\sin(\omega t + \tan^{-1}(-\omega\tau))$$

با رفع حالت گذار
(یعنی در زمان طولانی)

پاسخ یک سیستم درجه اول به یک ورودی سینوسی تابعی سینوسی است با همان فرکانس با دامنه‌ای همواره کوچکتر از دامنه ورودی و با تأخیر زمانی.

سیستم های درجه اول متوالی :



*) سیستم غیر تداخلی : یعنی سیستمی که در آن خروجی یک واحد روی واحد قبلی اثر ندارد. Non-Interactive

و بنابراین تابع Transfer مجموع برابر حاصلضرب تابع Transferها می‌شود.

$$\frac{H_1(S)}{Q_i(S)} = \frac{R_1}{\tau_1 S+1}$$

$$\tau_1 = R_1 A$$

$$\frac{Q_1}{Q_i} = \frac{1}{\tau_1 S+1}$$

برای تانک دوم :

$$q_1 - q_2 = A_2 \frac{dh_2}{dt}$$

$$\frac{H_2(S)}{Q_1(S)} = \frac{R_2}{\tau_2 S+1}$$

$$\tau_2 = R_2 A_2$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{1}{\tau_2 S+1}$$

$$\frac{H_2}{Q_i} = \frac{H_2}{Q_1} \times \frac{Q_1}{Q_i}$$

$$= \frac{R_2}{\tau_2 S+1} \times \frac{1}{\tau_1 S+1}$$

$$\boxed{\frac{H_2}{Q_i} = \frac{R_2}{(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)}}$$

$$\frac{H_2}{H_1} = ? = \frac{H_2}{Q_1} \times \frac{Q_1}{H_1}$$

$$= \frac{R_2}{\tau_2 s+1} \times \frac{1}{R_1}$$

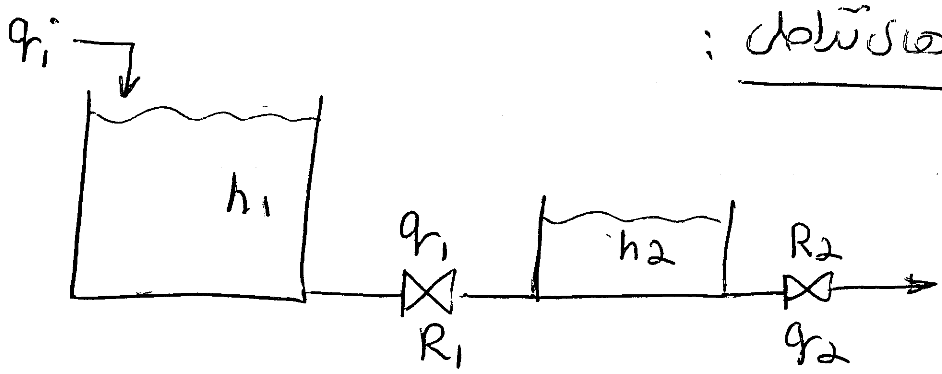
$$\boxed{\frac{H_2}{H_1} = \frac{R_2/R_1}{\tau_2 s+1}}$$ ← برخلاف $\frac{Q_2}{Q_1}$ ، بهره یک نیست

$$\text{مخرج} = (\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)$$

$$= \tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1+\tau_2)s + 1$$

⇐ دو سیستم درجه اول متوالی مانند سیستم درجه دوم اثر می‌کند.

سیستم‌های تداخلی :



تانک اول :

$$q_i - q_1 = A_1 \frac{dh_1}{dt}$$

نیروی محرکه : اختلاف ارتفاع دو تانک .

$$q_i - \frac{(h_1-h_2)}{R} = A_1 \frac{dh_1}{dt}$$

تانک دوم :

$$\begin{cases} q_1 - q_2 = A_2 \dfrac{dh_2}{dt} \\ \dfrac{(h_1-h_2)}{R_1} - \dfrac{h_2}{R_2} = A_2 \dfrac{dh_2}{dt} \end{cases}$$

نتیجه : دو معادله دیفرانسیل سیستم اول و دوم از هم مستقل نیستند (کوپل هستند)

یعنی تانک اول از تانک دوم اثر می پذیرد.

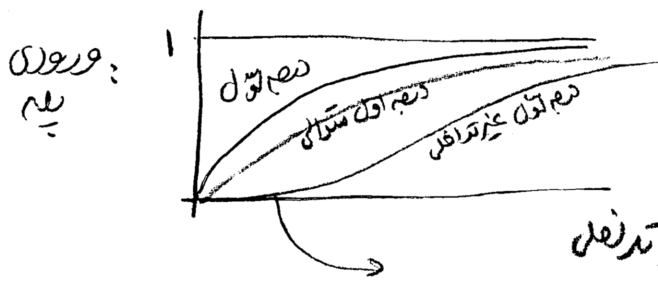
از حل همزمان دو معادله:

$$\frac{H_2}{Q_1} = \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2) s + 1}$$

اضافه نسبت به سیستم غیر تداخلی.

← نشان دهنده تداخل و اتصال اول و دوم

پاسخ این سیستم به ورودی ها:



در درجه اول غیر تداخلی

شیب در لحظه صفر = ۰

سیستم های درجه اول متوالی خواه تداخلی و خواه غیر تداخلی باشند هیچ گاه رفتاری نوسانی ندارند یعنی ریشه موهومی ندارند.

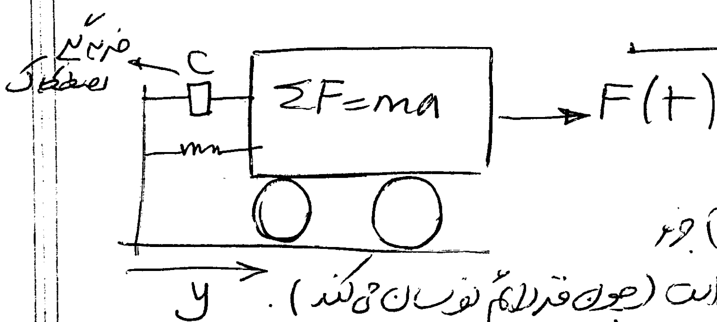
ازدیاد درجه سیستم موجب کندی پاسخ سیستم می گردد.

$$\boxed{r = n - m}$$

درجه مخرج درجه صورت

درجه بیشتر باشد پاسخ کندتر.

سیستم درجه ۲



اگر ضربه گیر نداشتیم تابع انتقال (ریشه) جزء حقیقی ندارد و جزء موهومی خالص است (چون مدام نوسان می کند).

$$F(t) - \cancel{KY}\, KY - C\frac{dY}{dt} = \frac{W}{g_c}\frac{d^2Y}{dt^2}$$

سیستم درجه دوم در مهندسی شیمی نداریم.

$$F(t)-KY-C\frac{dY}{dt}=\frac{W}{g_c}\frac{d^2Y}{dt^2}$$

$$\frac{W}{g_cK}\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{C}{K}\frac{dY}{dt}+Y=\frac{F(t)}{K}=X(t)$$

سیستم درجه دوم: معادله دیفرانسیل از درجه دوم.

سیستم های درجه دوم به جز K دو پارامتر دیگر نیاز دارند.

$2\xi\tau$

$$\tau^2Y''+2\xi\tau Y'+Y=X$$

ثابت زمانی $\leftarrow \tau$

ضریب میرایی $\leftarrow 2\xi\tau$

ξ Damping Factor.

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس}}\quad \tau^2s^2Y(s)+2\xi\tau sY(s)+Y(s)=X(s)$$

$$\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{1}{\tau^2s^2+2\xi\tau s+1}$$

در این مثال: $\tau=\sqrt{\dfrac{W}{g_cK}}$

$$2\xi\tau=\frac{C}{K}\longrightarrow\xi=\frac{C/K}{2\sqrt{\dfrac{W}{g_cK}}}=$$

$$\xi=\sqrt{\frac{g_c}{4WK}}$$

K: ضریب فنر

$$K_{\text{موازی}}=\sum K_i$$

$$\frac{1}{K_{\text{سری}}}=\sum\frac{1}{K_i}$$

* ما اینها را در فرمول τ نمی‌گذاریم.
تجمیع.

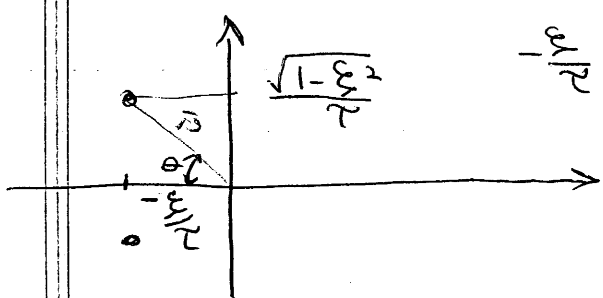
$$y(S) = \frac{x(S)}{\tau^2 S^2 + 2\xi \tau S + 1}$$

$$= \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{جمله‌ای یا جملاتی برای ورودی}} + \frac{\quad}{S-1} + \frac{\quad}{S-S_2}$$

$$S_{1,2} = \frac{-\xi\tau \pm \sqrt{\xi^2\tau^2-\tau^2}}{\tau^2}$$

$$S_{1,2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau^2}$$

رفتار سیستم درجه دوم از نظر نوسانی و غیرنوسانی بودن به ξ بستگی دارد.



$-\frac{\xi}{\tau} \pm i\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}$

$\xi > 1$ دو ریشه حقیقی منفی

$\xi = 1$ دو ریشه مضاعف منفی $(-\frac{1}{\tau})$

$\xi < 1$ دو ریشه مختلط با جزء حقیقی منفی

برای $\xi < 1$

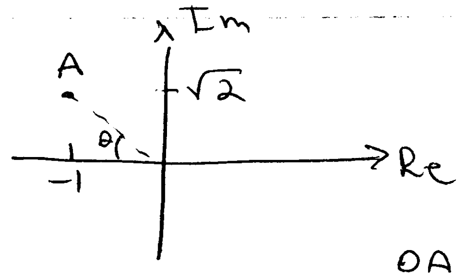
$$\text{طول وتر} = \sqrt{\frac{\xi^2}{\tau^2} + \frac{1-\xi^2}{\tau^2}} = \frac{1}{\tau}$$

$\xi > 1$	نوسانات میرا
$\xi = 1$	اکسپوننسیال میرا
$\xi < 1$	" "

$$\cos\theta = \frac{\xi/\tau}{1/\tau} = \xi$$

* اگر از مبدا به نقطه‌ای در روی مکان هندسی ریشه‌ها پاره خطی وصل کنیم طول آن پاره خط عکس ثابت زمان و کسینوس زاویه‌ای که با محور حقیقی می‌سازد ξ است.

ثابت : τ و ξ ؟



$$OA = \sqrt{1+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$$

طول وتر $= \sqrt{\frac{\xi^2}{\tau^2}+\frac{1-\xi^2}{\tau^2}} = \frac{1}{\tau}$

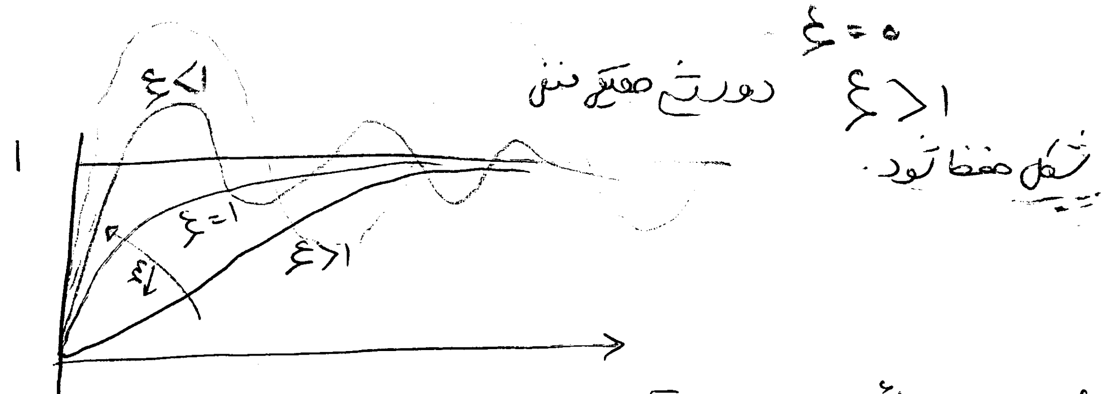
$$\xi = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نتیجه : سیستم‌های درجه دوم رفتار پاسخ به ورودی‌های مختلف به مقدار ξ آن وابستگی دارد

پر میرا	overdamp	: $\xi > 1$
میرایی بحرانی	critically damp	$\xi = 1$
کم میرا	underdamp	$\xi < 1$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2\tau^2+2\xi\tau s+1}} \longrightarrow y(t) = ?$$

با ورودی پله‌ای $\quad Y(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1}{\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1}$



(*) $\xi = 1$ ، میرایی بحرانی ، سریع‌ترین راه رسیدن بدون نوسان به پاسخ ۱ است .
هم برابرند . حداکثر سرعت ، حداقل نوسان .

$\xi<1$ نوسانات میرا:

نیاز به حفظ نیست

$$Y(t)=1-\frac{e^{-\xi t/\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}t+\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)$$

نوسانات با دامنه کاهنده.

نیاز به حفظ نیست

$$Y(t)=1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau} \qquad : \xi=1$$

$$: \xi>1$$

~~$Y(t)=1-(1$~~

$$Y(t)=1-e^{-\xi t/\tau}\left[\cosh\sqrt{\xi^2-1}\,\frac{t}{\tau}+\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\left[\sqrt{\xi^2-1}\right.\right.$$

هرچه ضریب میرایی کوچکتر شود پاسخ نوسانی تر می گردد.

ξ در سیستم های درجه اول متوالی هیچگاه کمتر از یک نمی شود (نوسانی نمی شوند).

درجه اول متوالی $\longrightarrow$ غیرتداخلی $=\dfrac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$

دو ریشه حقیقی تفکیک شده دارند بنابراین هیچگاه ξ کمتر از یک ندارند.

غیرتداخلی $=\dfrac{1}{\tau_1\tau_2 s^2+(\tau_1+\tau_2)s+1}$

$$\xi=\frac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\tau_1\tau_2}} \qquad \tau=\sqrt{\tau_1\tau_2}$$

واسطه حسابی — واسطه هندسی

همواره واسطه حسابی > واسطه هندسی

تداخلی $\longrightarrow$
$$\begin{cases}\xi=\dfrac{(\tau_1+\tau_2+A_1R_1)/2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}\\ \tau=\sqrt{\tau_1\tau_2}\end{cases}$$

در صورت حالت تداخلی یک عبارت اضافه شده پس باز هم $\xi>1$

سیستم های درجه اول متوالی غیرنوسانی هستند.

$$\xi_{\text{تداخلی}} > \xi_{\text{غیرتداخلی}}$$

یعنی نمودار غیرتداخلی پایین تر قرار میگیرد (بخاطر کاهش ξ).

$$\frac{Y(S)}{X(S)} = G(S)$$

$X(S) = \frac{1}{S}$ پله‌ای

$X(S) = 1$ ضربانی

$$\underbrace{y_2(S)}_{\text{ضربانی}} = S \underbrace{y_1(S)}_{\text{پاسخ پله‌ای}} \longleftarrow \begin{cases} y_1(S) = \frac{1}{S} G(S) \\ y_2(S) = G(S) \end{cases}$$

$$\boxed{y_2(t) = \frac{d y_1}{dt}}$$

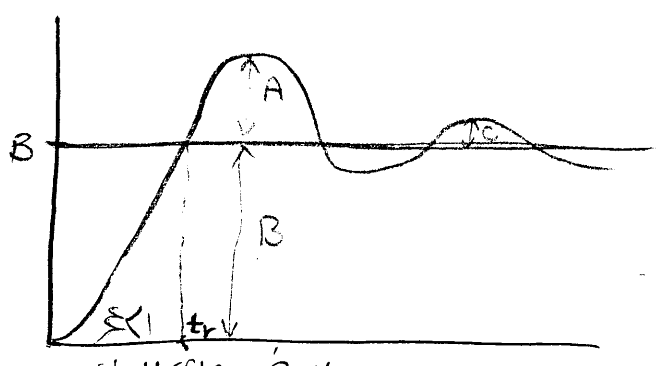
پس اگر $y_1(t)$ بدست آمده مشتق بگیریم پاسخ ضربانی بدست می‌آید.

تست ۱) پاسخ پله‌ای سیستم : $y(t) = 1 - t e^{-2t}$

$$\underbrace{y(t)}_{\text{ضربانی}} = ? = \frac{d}{dt}\left[1 - t e^{-2t}\right]$$

جلسه چهارم :

$$\frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau + 1}$$



پاسخ نوسانی پله‌ای.

۱) فراجهش Overshoot

حداکثر انحراف پاسخ از مقدار نهایی.

$$\text{overshoot} = \frac{A}{B}$$

$$overshoot = \frac{A}{B} = \exp\left[\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]$$

$\xi \downarrow$ هرچه $\longrightarrow$ overshoot $\uparrow$

2) Decay Ratio $\frac{C}{A} =$ نسبت فروکش

$$\frac{C}{A} = \exp\left[-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]$$

$$\frac{C}{A} = \left(\frac{A}{B}\right)^2$$

3) rising time (t_r) زمان خیز

زمانی است که پاسخ سیستم برای اولین بار به مقدار نهایی خود می رسد.

$$y = B\left[1 - \frac{e^{-\xi t/\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}\,t}{\tau} + \cdots\right]\right]$$

$$y = B \Rightarrow \boxed{t = \frac{\left[n\pi - \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad n = 1, 2, \ldots$$

ما با $n=1$ کار داریم:

$$\boxed{t_r = \frac{\left[\pi - \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

4) زمان پیک Peak time : t_p

زمانی است که پاسخ سیستم حداکثر است.

دارای min یا max می باشد.

$n=1$ زمانیکه اولین بار به max می رسد

$$\frac{dy}{dt} = 0 \longrightarrow \boxed{t_p = \frac{n\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi t/\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right]$$

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}$$ فرکانس رادیان

$$= 2\pi f \longrightarrow f = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\tau}$$

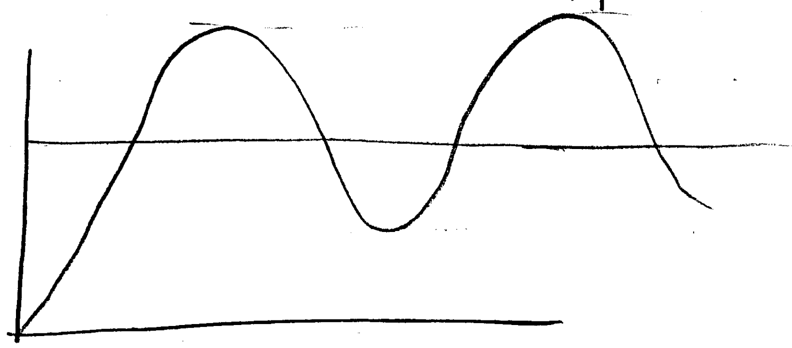
$$= \frac{2\pi}{T} \longrightarrow T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\boxed{T = 2t_p} \quad , \quad t_p = \frac{n\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xi = 0 \qquad S_{1,2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} i$$

$$\xi = 0 \Longrightarrow S_{1,2} = \pm \frac{1}{\tau} i \Longrightarrow$$ پاسخ سیستم

بصورت نوسان دائم است.



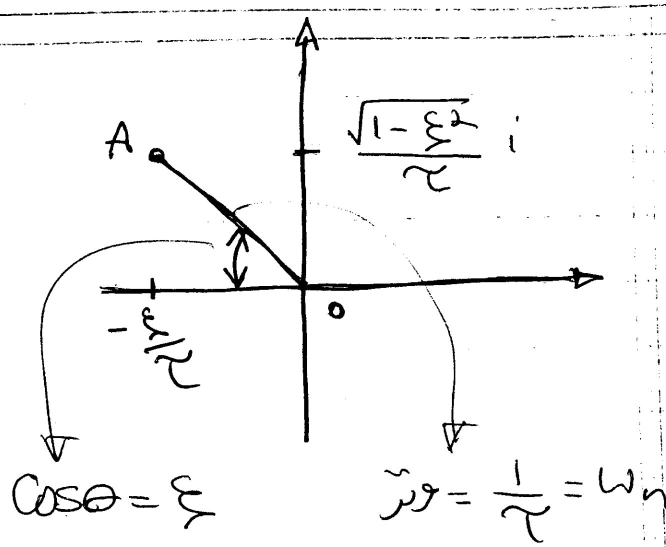
$$\xi = 0 \longrightarrow \omega_n = \frac{1}{\tau} \longleftarrow \omega \Big|_{\xi=0}$$

فرکانس طبیعی نوسان.

$$\underbrace{\omega_n}_{\text{طبیعی}} = \frac{1}{\tau}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi\tau}$$

$$T_n = 2\pi\tau$$



۵. زمان پاسخ (Response time):

زمان است که پاسخ سیستم درجه ۲ با تقریب ±95% به جواب برسد.
±98%

پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی سینوسی:

$$\frac{y(S)}{x(S)} = \frac{1}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\sin\omega t \\ x(S) &= \frac{A\omega}{S^2+\omega^2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$y(S) = \frac{A\omega}{S^2+\omega^2} \times \frac{1}{(S-S_1)(S-S_2)}$$

$$S_{1,2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}\, i \ , \quad \xi < 1$$

$$y(S) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} \times \frac{1}{(S-S_1)(S-S_2)}$$

$$S_{1,2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} i \qquad \xi<1$$

$$= -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau} \qquad \xi>1$$

$$= -\frac{1}{\tau} \qquad \xi=1$$

در تمام این حالت‌ها ریشه در سمت چپ محور موهومی است.

مربوط به S_1 و S_2

در نتیجه پاسخ همواره میرا است. جواب پس از زمان طولانی نوسان دائم است.

$$t \longrightarrow \infty \Longrightarrow y \not\longrightarrow \infty$$

$t \longrightarrow \infty \Longrightarrow$ اثرات جملات

اثر جملات $s^2+\omega^2$ باقی می‌ماند

ولی اثرات جملات ناشی از S_1 و S_2 حذف می‌شود (چون مقدار قسمت حقیقی منفی است).

صرف‌نظر از مقدار ξ

یعنی:

$$= \frac{a+bi}{s+i\omega} + \frac{a-bi}{s-i\omega} + \frac{}{s-S_1} + \frac{}{s-S_2}$$

نوسان دائم. ~~چون مقدار~~

$$y(t) = AR\, A \sin(\omega t + \Phi)$$

$$\text{دامنه پاسخ} = AR \cdot A = \frac{A}{\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2}}$$

$$\Phi = \tan^{-1}\left(\frac{-2\xi\omega\tau}{1-\tau^2\omega^2}\right)$$

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{-2\xi\omega\tau}{1-\tau^2\omega^2}\right)$$

۱) فرکانس نوسانات پاسخ سیستم نوع ۲ به ورودی سینوسی با فرکانس ~~...~~ ورودی یکسان است.

۲) پاسخ سیستم نوع ۲ دارای یک تأخیر زمانی به فرم $\tan^{-1}\frac{-2\xi\omega\tau}{1-\tau^2\omega^2}$ خواهد بود.

۳) دامنه پاسخ هم می‌تواند بزرگتر و کوچکتر دامنه ورودی باشد.

if $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \longrightarrow$ دامنه پاسخ $>$ دامنه ورودی

$\xi > \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow$ " $<$ "

$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow$ " $=$ "

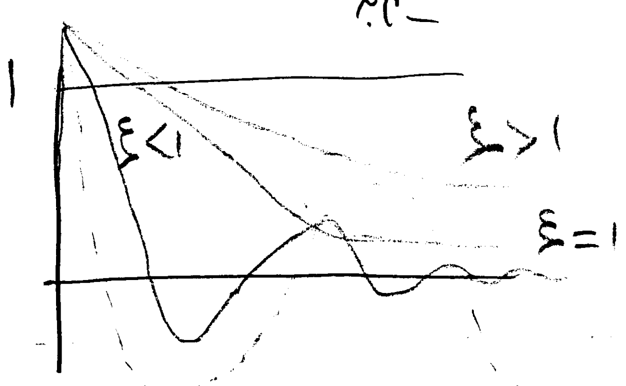
پاسخ سیستم نوع ۲ به ورودی ضربانی.

$x(t) = \delta(t) \longrightarrow$ [سیستم نوع ۲] $\longrightarrow Y(t)$

$$y_2(t) = \frac{dy_1(t)}{dt}$$

پاسخ هر سیستمی به ورودی ضربانی

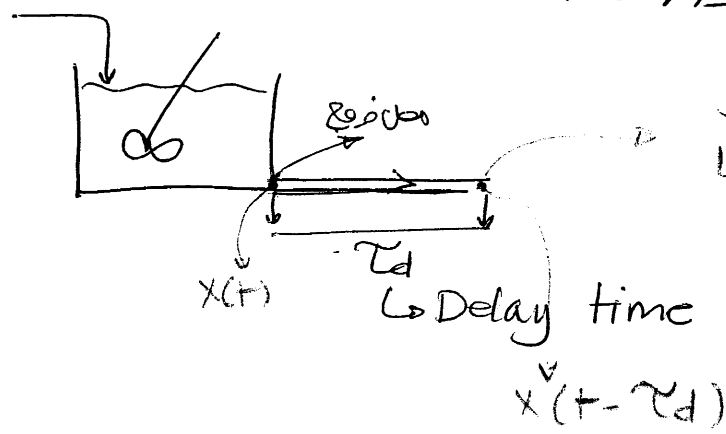
پاسخ ورودی پله‌ای همان سیستم به



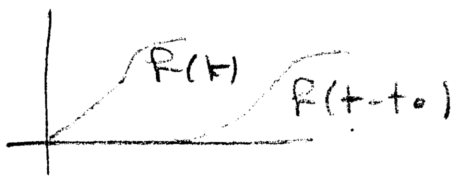
$\xi = 0$

overshoot یعنی $1 = \exp\left[\frac{-\pi \times 0}{\sqrt{1-0}}\right]$ = max overshoot همواره کوچکتر از یک

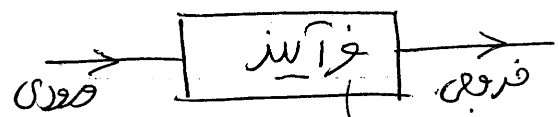
Lag Time : تأخیر زمانی



مثلاً این نقطه مشخصات یک دقیقه قبل تانک را نشان می‌دهد



$$L\{x(t-\tau_d)\} = e^{-\tau_d S} X(S)$$



۱) بیان ۲) معادله دیفرانسیل ۳) شرط مرزی ۴) حل به کمک لاپلاس ۵) $\frac{y(S)}{X(S)} = ?$ یا $y = F(x)$

برای معادلات استاندارد
۱) سیستم درجه ۲
۲) " " ۱
بررسی شد. برای سیستم‌های با درجه بالاتر به همین شکل است.

$$\frac{y(S)}{X(S)} = G_p(S)$$ تابع تبدیل پروسس.

$$G_p(S) \rightarrow \frac{k}{\tau S+1}, \quad \frac{1}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1}, \quad e^{-\tau_d S}$$

تلفیق تمامی این توابع با $e^{-\tau_d S}$ هم داریم یعنی جاییکه تأخیر زمانی داریم.

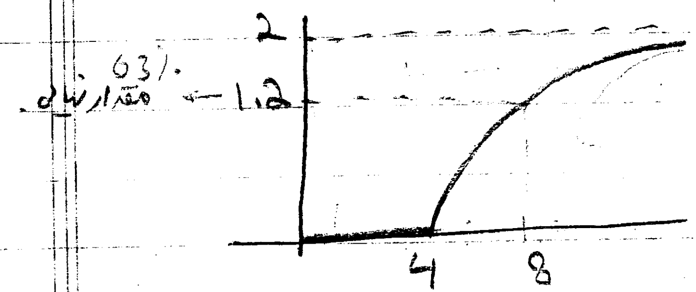
اندازه‌گیر ⟶ $G_m(s)$

تابع انتقال توسط سازنده اندازه‌گیر داده می‌شود.

⟵ اندازه‌گیر ⟵

بدست آوردن تابع انتقال: راه اول: بیننده
راه دوم: تجربی (آزمایشات شناسایی).

مثال: تابع تبدیل دماسنجی که در یک سیستم بعنوان عنصر اندازه‌گیر استفاده می‌گردد معلوم نیست. با اعمال یک ورودی پله ای باندازه ۲ واحد به آن جواب های زیر Record شده است. پارامترهای مدل این دماسنج را معلوم کنید.



$$G_m(s) = \frac{k_m e^{-\tau_d s}}{\tau_m s + 1}$$

$\boxed{\tau_d = 4}$

مقدار نهایی $= A K_m$

$2 = 2 K_m \longrightarrow \boxed{K_m = 1}$

توجه شود τ_d را باید کم کرد (از زمانی که سیستم به 63% مقدار نهایی خود می‌رسد).

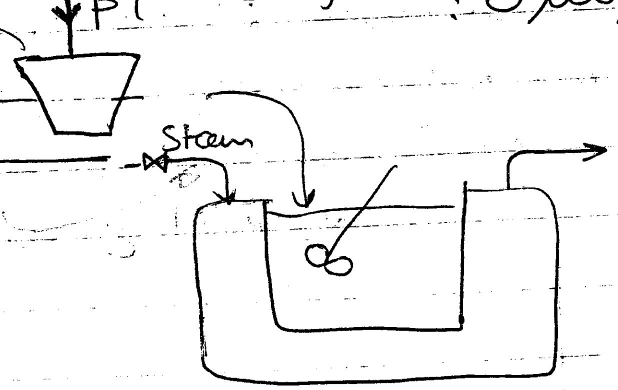
$\tau_m = 8 - \underbrace{4}_{\tau_d} = 4$:حل

$$G_m(S) = \frac{K_m}{\tau_m S + 1}$$

- توسط سازنده داده می‌شود.
- یا عمل می‌کنیم
- یا آزمایش شناسایی انجام می‌دهیم.

شیر کنترل:

توپه شیر کنترل. $P\uparrow$ و توسط پمپ‌ها



خط لوله بخار که قرار است ژاکت راکتور را گرم کند.

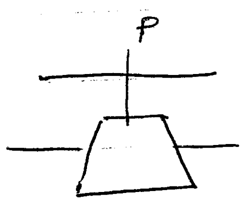
شیر کنترل:

۱- پنوماتیک — باز و بسته شدن شیر توسط کنترل فشار هوای سرشیر انجام می‌شود. این فشار هوا بین 3 تا 15 psi تغییر می‌کند.

۲-

$P = 3-15\ psi$

Air to close : یعنی با افزایش فشار، شیر را می‌بندیم.



Air to open :

3 psi کاملاً بسته — 15 psi کاملاً باز

$$\begin{cases} P\uparrow \Rightarrow Q\downarrow & \text{Air to closed} \\ P\uparrow \Rightarrow Q\uparrow & \text{Air to open} \end{cases}$$

۲- شیر کنترل برقی ← $I = 4mA \sim 20mA$

4mA کاملاً باز — 20mA کاملاً بسته

شیر برقی برای جابجایی خط آتش سوزی دیلوز توصیه نمی گردد.

تابع انتقال شیر کنترل ها:

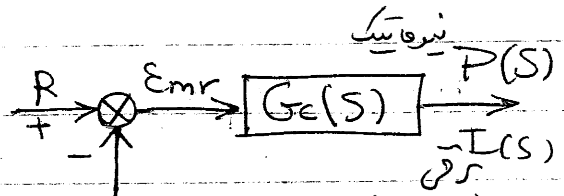
شیر معمولی:

$$\frac{Q(S)}{P(S)} = \frac{k_v}{\tau_v S+1}$$

یا $= k_v$ gain only.

هرچه ثابت زمانی شیر کمتر باشد پاسخ سریع تر است.

کنترلر:



کنترلر براساس میزان خطا به شیر کنترل دستوری دهد که باز یا بسته شود.

$$P(t) = \underbrace{P_s}_{\text{فشار حالت steady}} + \underbrace{K_c\,\varepsilon(t)}_{\text{متناسب با خطا}}$$

$$P - P_s = \mathcal{P}$$

کنترل تناسبی:

$$\frac{\mathcal{P}(S)}{\varepsilon(S)} = K_c$$

کنترلی که متناسب با مقدار خطا از خود واکنش نشان می دهد.

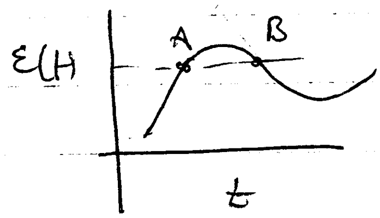
K_c می تواند + یا − باشد:

واحد K_c: $K_c = \frac{psi}{Error}$ یا $\frac{mA}{Error}$

کنترل دما $= \frac{psi}{°C}$ ، کنترل سطح $= \frac{psi}{m}$ ، کنترل فشار بی بعد $= \frac{in}{in}$

$G_c(s) = k_c$ تناسبی P

در A و B خطا یکی است ولی آیا باید در هر دو حالت باید یک دستور به شیر کنترل داده شود (P).



جهت تغییرات را باید در نظر گرفت :

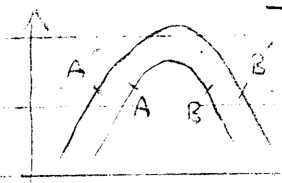
$$P = P_s + k_c\Big[\varepsilon(t) + \tau_D \underbrace{\frac{d\varepsilon(t)}{dt}}_{\text{مشتق خطا}}\Big]$$

$$= \frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = k_c[1+\underbrace{\tau_D}_{\text{زمان مشتق}} s]$$ PD تناسبی مشتق ،

هیچگاه اطلاعات نقطه بعد را نداریم پس مشتق مفهوم ندارد : ← آینده هنوز نیامده

$$P' = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

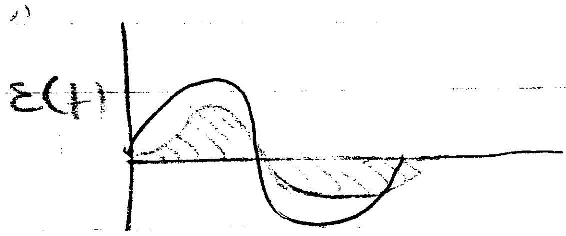
$$= \frac{P(t) - P(t-\Delta t)}{\Delta t}$$ توصیه



روند خطا : نشان می دهد خطا زیاد و یا کم می شود ← مشتق

هم خطا و روند و انتگرال خطا نیز مهم است :

در A و B و A' و B' مقدار و جهت خطا یکسان است پس انتگرال خطا را نیز باید در نظر گرفت



انتگرال خطا : مدت زمان را به عبارتی بیان می کند که خطا داریم .

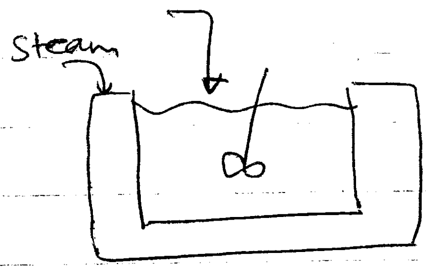
$$P(t) = P_s + k_c\Big[\underbrace{\varepsilon(t)}_{\text{مقدار مطلق خطا}} + \tau_D \underbrace{\frac{d\varepsilon(t)}{dt}}_{\text{روند تغییرات خطا}} + \underbrace{\frac{1}{\tau_I}\int_0^t \varepsilon(t)dt}_{\text{انتگرال خطا (مجموع پرت‌ها)}}\Big]$$

Pert

کنترل کننده

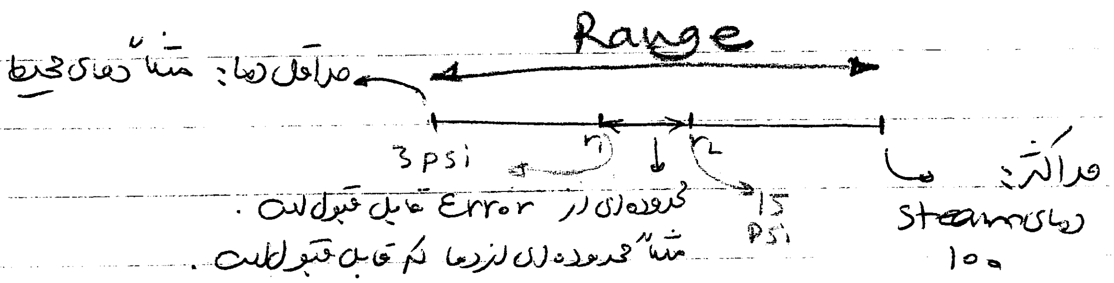
$$\frac{P(s)}{E(s)} = K_c\left[1+\tau_D s+\frac{1}{\tau_I s}\right] : PID$$

$$\frac{P(s)}{E(s)} = K_c\left[1+\frac{1}{\tau_I s}\right] \quad ; \text{PI کنترل کننده}$$



; Proportional Band

پهنه تناسبی



پهنه تناسبی: درصد محدوده خطا تقسیم بر رنج. هرچه کوچکتر باشد کنترل مشکل‌تر است.

فقط برای کنترل تناسبی:

$$PB\% = \frac{Error}{Range}\times 100$$

یا 18-4 $\quad \to K_c = 1\ \frac{mA}{^\circ C}$

$$K_c = \frac{P}{E} = \frac{15-3}{Error} = \frac{12}{Error} \longrightarrow Error = \frac{12}{K_c}$$

تغییرات فشار

$$= \frac{15-3}{72-68} = \frac{12}{4} = 3\ psi/^\circ C$$

تغییرات خطا

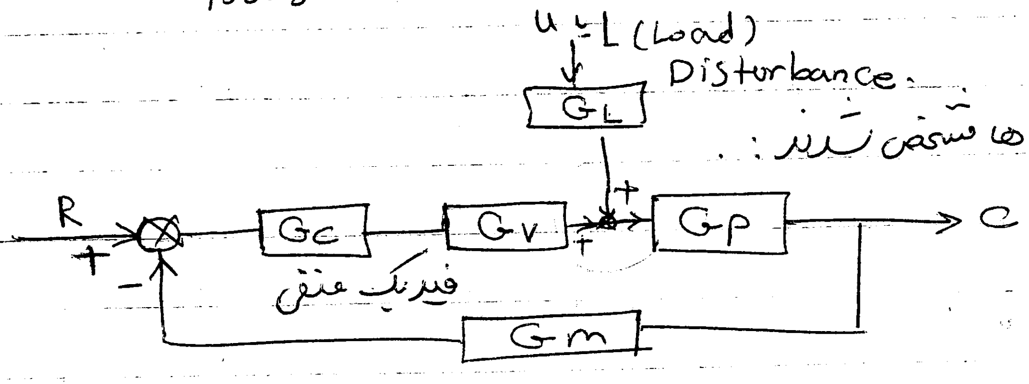
$$PB\% = \frac{12/K_c}{Range}\times 100 = \frac{1}{K_c}\times \text{ضریب}$$

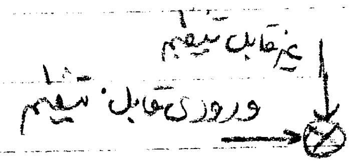
یعنی PB% با Kc نسبت عکس دارد

$\%PB = 0 \longrightarrow K_c = \infty \longrightarrow$ on-off کنترل

در این مثال: $PB\% = \frac{72-68}{100-30} = \frac{4}{70}\times 100 = \frac{400}{70} = 5/71\%$

تمامی بلاک ها مشخص شدند:





منشاء عدم خطا: Disturbance.

عواملی که موجب تغییر خروجی می گردند:

۱) Servo Mechanism:

در این مسائل (مسئله Servo). Set Point را تغییر می دهیم.

یعنی تغییرات C براساس تغییرات R است.

$$\frac{C}{R} = ?$$

مسئله سرو: تغییر R داریم، تغییر U نداریم.

۲) Regulator Mechanism:

اغتشاشات باعث تغییر خروجی می گردد

$$\frac{C}{U} = ?$$

تغییر U داریم، تغییر R نداریم

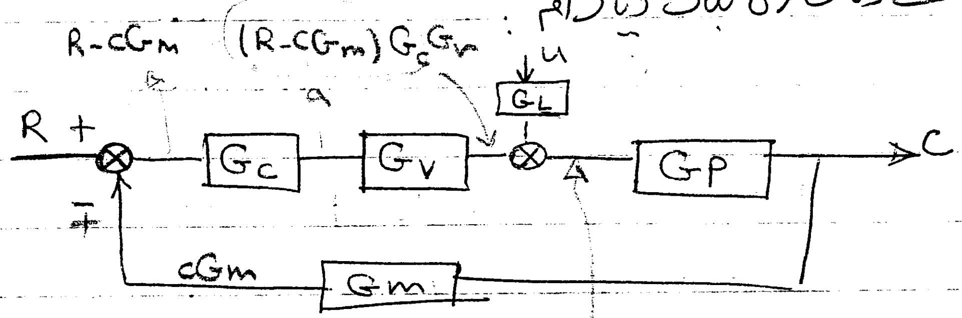
هدف کنترل: یکی بودن C و R، چه R تغییر کند چه نکند.

فرض: C باید همواره مقدار متغیر یا Set Point یا R را دنبال کند.

$$\boxed{C \longrightarrow R}$$

سیستم

ساده سازی بلاک دیاگرام:



$$\frac{C}{u}=?\qquad \frac{C}{R}=?$$

$$\{(R-CG_m)G_cG_v+uG_L\}G_p=C$$

$$(R-CG_m)G_cG_vG_p=C$$

$$\left(1-\frac{C}{R}G_m\right)G_cG_vG_p=\frac{C}{R}$$

$$\frac{C}{R}=\frac{G_cG_vG_p}{1+G_cG_vG_mG_p}$$

حاصلضرب توابع رفت

$$=\frac{\text{حاصلضرب توابع در مسیر پیشرو}}{1+\text{حاصلضرب توابع در حلقه}}$$

Feedback

Feed back منفی

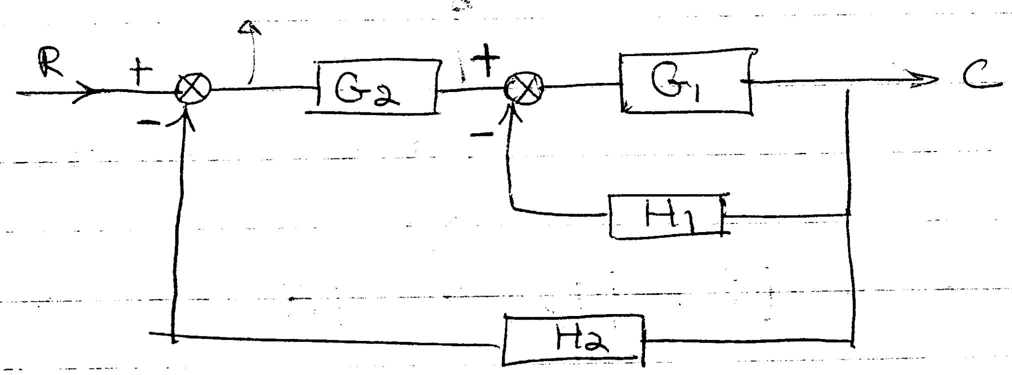
regulator:

$$\frac{C}{u} = \frac{G_L G_p}{1 + G_c G_v G_m G_p}$$

حاصلضرب توابع در مسیر پیشرو (از u تا c)

از اشکال $[(R - CH_2)G_2 - CH_1]G_1 = C \Rightarrow \frac{C}{R} = \checkmark$

Error



$\frac{E}{R} = ?$: Error Ratio

1) ✓ $\dfrac{1 - G_1H_1}{1 - G_1H_1 + G_1G_2H_2}$

2) ع $\dfrac{G_1G_2}{1 - G_1H_1 + G_1G_2H_2}$

3) ع $\dfrac{G_1G_2H_1}{1 - G_1H_1 + G_1G_2H_2}$

3) ع $\dfrac{G_1G_2H_2}{1 + G_1H_1 - G_1G_2H_2}$

$$E = R - CH_2$$

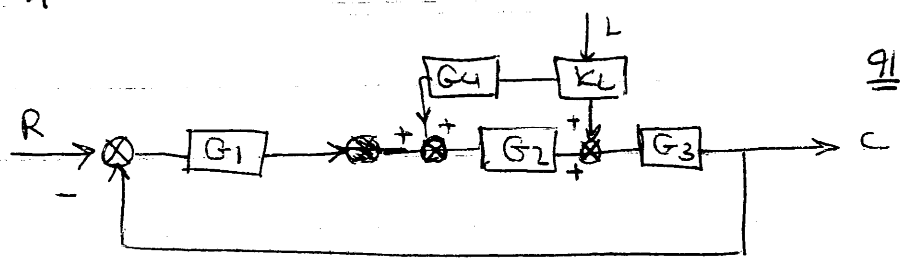
$$\rightarrow \frac{E}{R} = 1 - \frac{C}{R}H_2$$

* در حل این مسائل فقط از روش کوتاه استفاده کنید اگر جواب نرسید تست را رها کنید.

اگر $H_2 = 0 \Longrightarrow \frac{E}{R} = 1$ پس فقط گزینه ۱ درست است.

مسائل بلاک دیاگرام،

سال ۷۹ ـ تست ۹۱



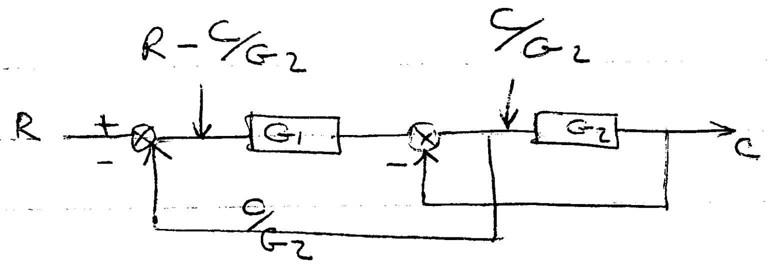
1) $\frac{C}{L} = \frac{G_2G_3G_4 + K_LG_3}{1 + G_1G_2G_3}$

2) $\frac{1 + G_1G_2G_3}{1 + K_LG_3G_4}$

3) $= \frac{K_LG_2G_3}{1 + G_1G_2G_3G_4}$

4) $\frac{G_2G_3G_4}{1 + G_1G_2G_3 + K_LG_4}$

سال ۸۳ ـ تست ۹۲



1) $\frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 + G_2}$

2) $\frac{G_1G_2}{1 + G_1 + G_2}$

3) $\frac{G_1 + G_2}{1 + G_1G_2}$

4) $\frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2}$

راه اول : $C/R = 0 \rightarrow G_1 = 0$ ← پس ۱ یا ۳ یا ۴.

راه دوم :

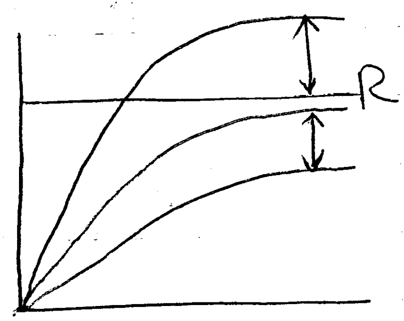
$$\left\{\left[\frac{R}{R} - \frac{C}{G_2 R}\right]G_1 - \frac{C}{R}\right\}G_2 = \frac{C}{R}$$

$$\rightarrow \frac{C}{R} = \frac{G_1G_2}{1 + G_2 + G_1}$$

راه حل: صفر قرار دادن شیب‌های فراخم.

مرور: offset : افت کنترل.

خطای حالت ماندگار یا steady state Error :



$$\underset{\text{مقدار مورد}}{R} - C\Big|_{t=\infty} =$$ خطای حالت ماندگار

$$offset = R(\infty) - C(\infty)$$
$$= \lim_{S \to 0} SR(S) - SC(S)$$

$$offset = SR(S)\left[1 - \frac{C}{R}\right]$$

وقتی که R تغییر نکند و u تغییر بکند: $S \to 0$

$$\begin{cases} u \neq 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

مساله: $offset = R(\infty) - C(\infty)$

چه R تغییر کند چه u تغییر کند تعریف offset همین است.

$$= 0 - C(\infty)$$
$$= -SC(S) \quad S \to 0$$

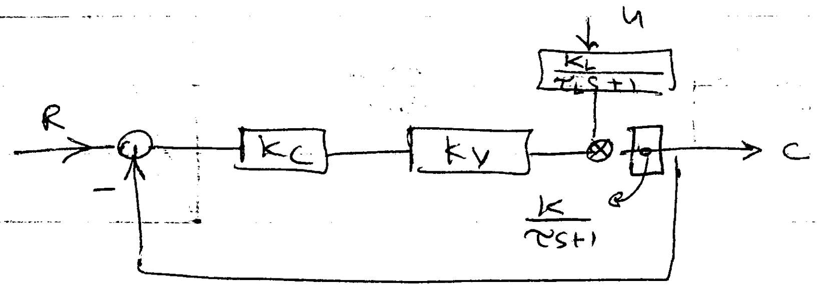
$$offset = -Su(S)\frac{C}{u}$$

همواره : $offset = R(\infty) - C(\infty)$

$R \neq 0 , U = 0 \longrightarrow offset = S\{R(S)\left[1 - \frac{C}{R}\right]$

$R = 0 , U \neq 0 \longrightarrow offset = -S\,U(S)\,C/U$

مثال :



الف) تغییر پله ای در مقدار مقرر داشته باشیم

$$offset = \lim_{S \to 0} S R(S)\left[1 - C/R\right]$$

$$= \lim_{S \to 0} S \times \frac{1}{S}\left[1 - \frac{K_c K_v K}{1 + K_c K_v K}\right]$$

$$= \frac{1}{1 + K_c K_v K}$$

* نکته : در بلاک ها $S = 0$ را قرار دهید . چون حالا پایا می‌خواهیم $S = 0$ را قرار دهیم .

$K_c \uparrow \Longrightarrow offset \downarrow$

افزایش بهره کنترلر موجب کاهش offset شده به شرطی که سیستم ناپایدار نباشد .

ب) $offset = -S U(S)\,\frac{C}{U}$

$$-S \times \frac{1}{S} \times \frac{K_L K}{1 + K_c K_v K}$$

باز هم $K_c \uparrow$ موجب کمتر گردد offset به شرطی که سیستم ناپایدار نگردد .

توجه اگر بجای تناسبی، تناسبی مشتق قرار دهیم باز هم پاسخ تفاوتی ندارد.

$$k_c \xrightarrow[S\to 0]{} k_c(1+\tau_D S)$$

* یعنی عامل مشتق اثری بر offset ندارد. offset
* افزایش عامل تناسبی موجب کاهش offset می‌گردد.

$$\text{offset} = -S \times \frac{1}{S}\left[\frac{k_L k_F}{1+k_c k_v k}\right]$$

اگر کنترل تناسبی انتگرالی باشد:

$$k_c\left(1+\frac{1}{\tau_I S}\right) \to \frac{k_c(1+\tau_I S)}{\tau_I S} \to \frac{k_c}{\tau_I S}$$

هم در مخرج را فعلاً نمی‌توان صفر گذاشت.

$$\text{offset} = S \times \frac{1}{S}\left[1-\frac{\frac{k_c}{\tau_I S}\cdot k_v k}{1+\frac{k_c}{\tau_I S}k_v k}\right]$$

$$= 1\left[1-\frac{k_c k_v k}{\tau_I S + k_c k_v k}\right]_{S\to 0} = 1-1 = 0$$

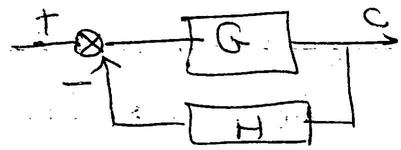
عامل انتگرال موجب ~~کاهش~~ حذف offset می‌گردد.

$$\text{offset} = -S \times \frac{1}{S}\;\frac{k_L k}{1+\frac{k_c}{\tau_I S}k_v k}$$

$$= -\frac{k_L k \tau_I S}{\tau_I S + k_c k_v k}$$

وجود عامل انتگرال موجب حذف offset در مورد مطالب می‌گردد.

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$$



GH : تابع ترنسفر مدار باز.

$$GH = \frac{K(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)\cdots(\tau_n S+1)}{S^N(\tau_a S H)\cdots(\tau_2 S+1)}$$

$H(S)=1$ unit feedback

پله $R(S) = \frac{1}{S}$

ضربه $= 1$

خطی $= \frac{1}{S^2}$

$$\text{offset} = \lim_{S \to 0} S\,R(S)\left[1 - \frac{C}{R}\right] = S R(S)\left[1 - \frac{K/S^N}{1 + \frac{K}{S^N}}\right]$$

$$\text{offset} = S R(S)\left[\frac{S^N}{S^N + K}\right]$$

	$N=0$	$N=1$	$N>1$
پله	$\frac{1}{1+K}$	$S \times \frac{1}{S} \times \frac{S}{S+K} = 0$	$S \times \frac{1}{S} \times \frac{S^2}{S^2+K} = 0$
ضربه	0	0	0
خطی	∞	$\frac{1}{K}$	0

$N=0$ و ضربانی $\longrightarrow S \times 1 \times \left[\cancel{k-}\ \frac{1}{1+k}\right] = S \times \frac{k}{1+k} = 0$

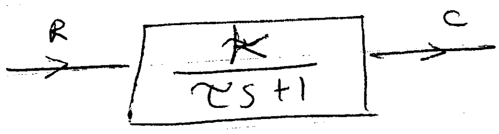
$N=1$ و ضربانی $\longrightarrow S \times 1 \times \left[\frac{S}{S+k}\right] = 0$

$N=0$ و خطی $\longrightarrow S \times \frac{1}{S^2}\left[\frac{1}{1+k}\right]$

$N=1$ و خطی $\longrightarrow S \times \frac{1}{S^2}\ \frac{S}{S+k} = 1/k$

$N>1$ و خطی $\longrightarrow S \times \frac{1}{S^2} \times \frac{S^2}{S^2+k} = 0$

مثال:



ساده شده بلاک دیاگرام ها:

تغییر خطی در مقدار مقرر

$R(t) = t$

$$\text{offset} = \lim_{t \to \infty} SR(S) - SC(S)$$

$$= SR(S)\left[1 - \frac{C}{R}\right]$$

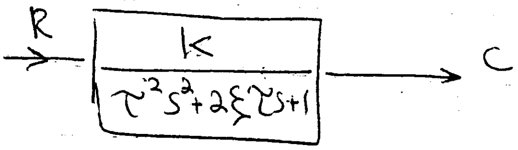
$$\text{offset} = S \times \frac{1}{S^2}\left[1 - \frac{k}{\tau S+1}\right]$$

$$= \frac{1}{S} \times \frac{\tau S + 1 - k}{\tau S + 1}$$

$k=1 \longrightarrow \text{offset} = \tau$

$k \neq 1 \longrightarrow \text{offset} = \begin{cases} +\infty & k<1 \\ -\infty & k>1 \end{cases}$

مثال:



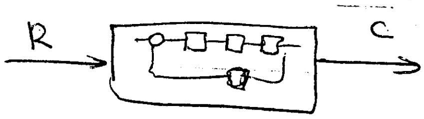
$$offset = s \times \frac{1}{s^2}\left[1-\frac{C}{R}\right] =$$

$$= s \times \frac{1}{s^2}\left[1-\frac{K}{\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1}\right]$$

$$= \frac{1}{s}\;\frac{\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1-K}{\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1}$$

$K=1 \longrightarrow offset = 2\xi\tau$

$k\neq 1 \longrightarrow off = \pm\infty$



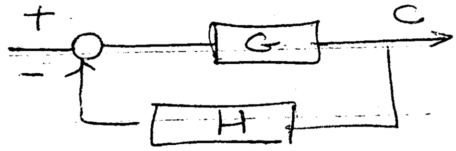
اگر هم بار وهم R تغییر کنند :

$$C = \frac{C}{R}\times R + \frac{C}{u}\times u$$

$$offset = R(\infty) - C(\infty)$$

$$= sR(s) - s\left[\frac{C}{R}\times R + \frac{C}{u}\times u\right]$$

$$s \longrightarrow 0$$



$$\frac{C}{U} = \frac{---}{1+GH}$$

چه U تغییر کند چه R داریم :

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

$$C = U \times \frac{---}{1+GH}$$

$$C = R \times \frac{G}{1+GH} = \frac{---}{S-r_1} + \cdots + \frac{---}{S-r_n}$$

تجزیه کسر

r_1 تا r_n ریشه های $1+GH=0$ می باشند.

با لاپلاس معکوس گیری

خروجی : $C(t) = \underbrace{A}_{\text{اثر ورودی}} + \underbrace{a_1 e^{r_1 t} + a_2 e^{r_2 t} + \cdots + a_n e^{r_n t}}_{\text{جملات ناشی از ریشه های } 1+GH=0}$

مفهوم پایداری : اگر ورودی محدودی وارد سیستم کردیم باید خروجی محدود بگیریم.

یک مفهوم BIBO است.

BI: Bounded Input

BO: Bounded output

$$C(t) = \underset{\text{به ورودی}}{\text{جمله مربوط}} + \sum_{n=1}^{...} a_n e^{r_n t}$$

r_1 تا r_n ریشه های $1+GH(S)=0$ هستند.

که معادله مشخصه سیستم.

زمان سیستم پایدار نیست که $\exists r_m \quad r_m > 0$
در این صورت با زمان جمله مورد نظر حذف نشده و افزایش می یابد.

* قسمت نوسانی در این بحث تأثیری ندارد.

هدف از بحث پایداری: آیا معادله $1 + GH = 0$ ریشه ای با جزء حقیقی مثبت (در سمت راست محور موهومی دارد).
به تعداد ریشه هایی که در سمت راست محور موهومی داریم ریشه ناپایدار کننده داریم
عامل ناپایداری: داشتن ریشه ای با جزء حقیقی مثبت.

روش های بررسی پایداری:

1) $1 + GH(S) = 0 \rightarrow r_1 r_2 \ldots$ را بدست آوریم. عملاً این روش غیرقابل انجام است.

مثال: $1 + GH = S^3(S+1)(S+2)(S+3) + K = 0$

2) روش هایی که معادله را حل نمی کنند تشخیص می دهند چند ریشه در سمت راست محور موهومی است:

2) آزمون روث Roth Test
3) مکان هندسی ریشه ها Root Locus

4) پاسخ فرکانسی ریشه ها Bode
5) دیاگرام نایکوست Nyquist Diag.

* روث + لعت کنترل = ٪25 سؤالات .

✓ آزمون روث : Routh Test :

$1+GH(S)=0$ معادله مشخصه مدار بسته .

$$1+GH(S)=a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$1+GH$ یک چندجمله‌ای با ضرایب ثابت است .

۱) چندجمله‌ای به صورت نزولی Sort شود .

۲) بجای جملاتی که نداریم صفر قرار دهیم .

۳) تشکیل جدول .

ردیف اول	s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	----
ردیف دوم	s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	----
		b_1	b_2		
ردیف n ام	s				
ردیف n+1 ام	s^0				

$$b_1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2=\frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

همیشه بر درایه اول سطر بالا تقسیم می‌گردد .

۴) ستون اول جدول را نگاه کنید . به تعداد تغییر علامت ها ریشه ناپایدار کننده داریم .

مثال:

$$1+GH(s) = s^3+2s^2+3s+1$$

1	3
2	1
$\frac{5}{2}$	
1	

مثال:

2
-1
3
4

* دو تا ریشه ناپایدار کننده

1
-1
-3

2 تا *

1
2
3
-1

1

نحوه سوال: 1) چک کردن پایداری Roth →

تعداد ریشه های ناپایدار $n = ?$

حالت 2)

$$1+GH = 1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

K چند باشد تا پایدار باشد؟

$$\rightarrow 1+GH = s(s+1)(s+2)+K = 0$$

$$s^3+3s^2+2s+K = 0$$

1	2
3	K
$\frac{6-K}{3} > 0$	
$K > 0$	

برای پایداری → $\frac{6-K}{3} > 0$

$6-K > 0$

$K > 0$

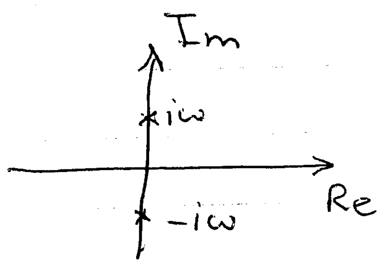
$0 < K < 6$

یعنی K را برای کاهش offset تا 6 می توان زیاد کرد

آزمون روث فقط ریشه های مرز پایداری را می دهد.

آزمون روث ← {
- تعداد ریشه های ناپایدار را می دهد و نه
~~خود ریشه های بجز ریشه های مرز پایداری~~
- بجز ریشه های مرز پایداری و ناپایداری.

حالت 3) ریشه روی مرز ناپایداری را پیدا کنید؟



$$(s+i\omega)(s-i\omega) = s^2+\omega^2$$

1	s^n		
2	s^{n-1}		
	s^2	C	D
n	s		
n+1 ام	s^0		

اگر سطر nام جدول روث صفر شود سیستم روی مرز پایداری و ناپایداری است.

1) سطر nام را برابر صفر قرار می دهیم ← $k\checkmark$

$$Cs^2+D=0$$

$$s=\pm i\sqrt{\frac{D}{C}}$$

مثال:

1	1	2
2	3	k
3	6-k	
4	k	

$k \longrightarrow 3s^2+k=0 \longrightarrow s=\pm i\sqrt{2}$

$6-k \longrightarrow 6-k=0 \longrightarrow k=6$

$$1+GH = 1+\frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$(s+1)(s+2)(s+3)+k=0$$

$$(s+1)(s^2+5s+6)+k=0$$

$$s^3+6s^2+11s+6+k$$

1	1	11
2	6	6+k
3	$\frac{66-6-k}{6}$	
4	6+k	

سطر n ام = 0

یعنی سطر سوم = 0

$$\frac{66-6k}{6}=0 \longrightarrow \boxed{k=60}$$

← k مرز پایداری.

$6s^2+(6+k)=0$ ← سطر n-1 ام را می‌نوشتیم

$6s^2+66=0$ برای پیدا کردن ریشه

$$s=\pm i\sqrt{11}$$

- تکنیک معمول ← فقط دارن سطر n ام = 0 ← k بدست می‌آید ← معادله سطر n ام را می‌نویسیم
← s را بدست می‌آوریم
ریشه ها را.

حالات خاص :

اگر ستون اول یکی از ردیف ها صفر شود .

۱) اگر همه عناصر آن ردیف خلص صفر نباشد در این صورت صفر را به ε تبدیل کنید $0 \to \varepsilon$ ← راه حل

جدول را با ε ادامه دهید

در انتهای کار $\varepsilon \to 0^+$ میل دهید

x	x	
0		

۲) اگر همه عناصر آن سطر خاص صفر شود . در این حالت :

چند جمله ای مربوط به ردیف بالای این سطر را تشکیل دهید .

$P(s)$

$$\frac{dP}{ds} = \bigcirc s^m + \dots$$

چند جمله ای زیر بدست .

ضرائب این چند جمله ای را بعنوان ضرائب سطری که همه عناصر آن صفر شده بود استفاده کنید و ادامه جدول .

مثال :

1	2	3
2	4	5
$0 \to \varepsilon$	$1/2$	
$\frac{4\varepsilon-1}{\varepsilon}$	5	

تغییر علامت

عدد منفی

تغییر علامت .

$$\frac{\left(\frac{4\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{2} - 5\varepsilon}{\frac{4\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \frac{1}{2} - \frac{5\varepsilon^2}{4\varepsilon-1} > 0$$

توجه: اگر سطر nام صفر باشد می‌گوییم سیستم در مرز پایداری و ناپایداری است.

مثال:

سطر دوم مضرب از سطر اول است.

۴ جمله بوده ← پس یک چندجمله‌ای درجه ۴ بوده.

s^5	1	2	3
s^4	2	4	6
s^3	8	8	0

$$P(S) = 2S^4 + 4S^2 + 6$$

$$\frac{dP}{dS} = 8S^3 + 8S$$

s^5	1	2	3
s^4	2	4	6
s^3	8	8	
s^2	2	6	
s	-16		
s^0	6		

مکان هندسی ریشه ها

در پایداری به دنبال این سوال هستیم که مخرج ساده شده $(1+GH)$ دارای ریشه ای در سمت راست محور موهومی هست یا خیر؟

حاصلضرب مدار باز

$$1+GH(s)=0$$

$$1+\frac{KN(s)}{D(s)}=0$$

در مکان هندسی هدف این است که به کمک تابع مدار باز به طور کیفی موقعیت ریشه های $1+GH=0$ را در صفحه مختصات موهومی نشان دهیم.

قواعد رسم مکان :

$$1+GH(s)=1+\frac{KN(s)}{D(s)}=0$$

$$\frac{D(s)+KN(s)}{D(s)}=0$$

۱) ریشه های $N(s)=0$ (صورت مدار باز) صفرهای مکان هندسی و با o نمایش می دهیم و ریشه های $D(s)=0$ (مخرج مدار باز) قطب های مکان هندسی و با × نمایش می دهیم.

۲) وقتی $K=0 \Leftarrow D+KN=0$

$D(s)=0$

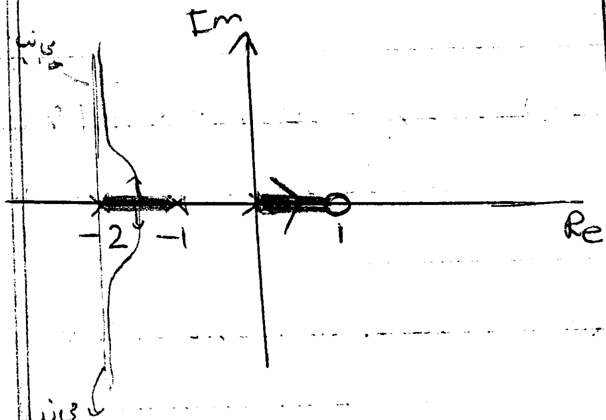
مکان هندسی از قطب آغاز می شود. پس قطب ها شروع مکان هستند و متناظر با $K=0$

وقتی $K=\infty \Leftarrow N(s)=\frac{-D(s)}{K}=0$

مکان هندسی به صفرها ختم می شود.

$$GH(s)=\frac{K(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$$

۱) $s-1=0 \rightarrow s=1$ صفرهای مکان



۳) $n=3,\ m=1 \rightarrow n-m=2$ دو تا مجانب داریم.

۴) $\delta=-\partial$

۵) $\theta=\frac{(2k+1)\pi}{3-1} \rightarrow \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$

۳) اگر n عده قطب ها و m عده صفرها باشد.

m تا از صفرها ختم می‌شوند ← m تا از قطب ها

به موازات مجانب به ∞ می‌روند ← $n-m$ باقی مانده

۴) محل هم راسی مجانب ها :

$$\gamma = \frac{\Sigma P_i - \Sigma Z_i}{n-m}$$

$$\gamma = \frac{[0-1-2]-[1]}{3-1} = -2$$

۵) زاویه مجانب ها با محور حقیقی :

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$k = 0 , 1 , \cdots , n-m-1$$

۶) آن قسمتی از محور حقیقی جزء مکان است که مجموع عده صفرها و قطب های سمت راست آن فرد باشد.

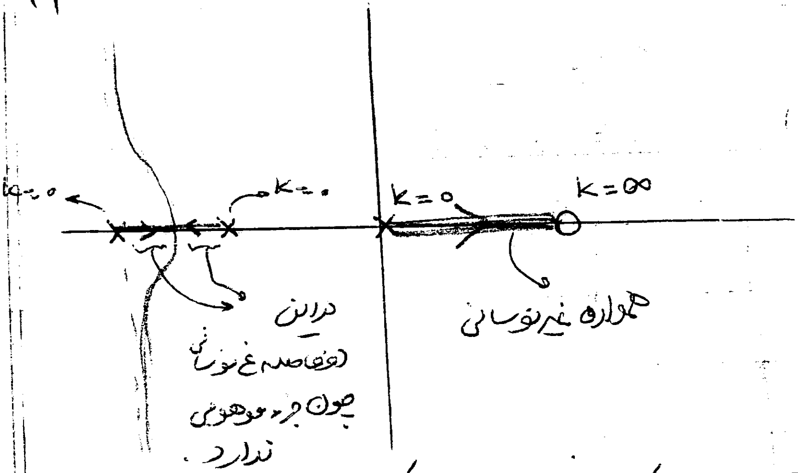
۷) اگر فاصله بین دو قطب مجاور جزء مکان باشد نقطه BEP (Break away Point) یا نقطه جدائی داریم.

$$\text{نقطه جدائی} = \Sigma \frac{1}{S-Z_i} = \Sigma \frac{1}{S-P_i}$$

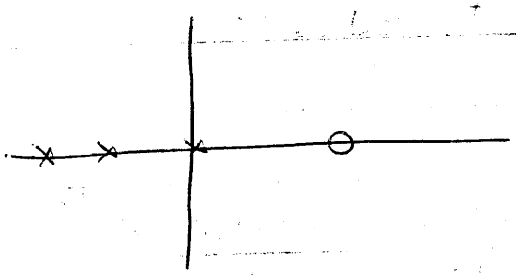
در این مثال :

$$\frac{1}{S-1} = \frac{1}{S} + \frac{1}{S+1} + \frac{1}{S+2}$$

و تا بین $\boxed{-2 < S < -1}$



* این سیستم همواره (بازای جمیع مقادیر K) یک ریشه ناپایدار کننده است.
* در مقادیر کم K غیرنوسانی
* در k زیاد نوسانی



را بدست آورید . $1+GH=0$

$$1+\frac{k(s-1)}{s(s+1)(s+2)}=0$$

$$s(s+1)(s+2)+k(s-1)=0$$

$$s^3+3s^2+2s+ks-k$$

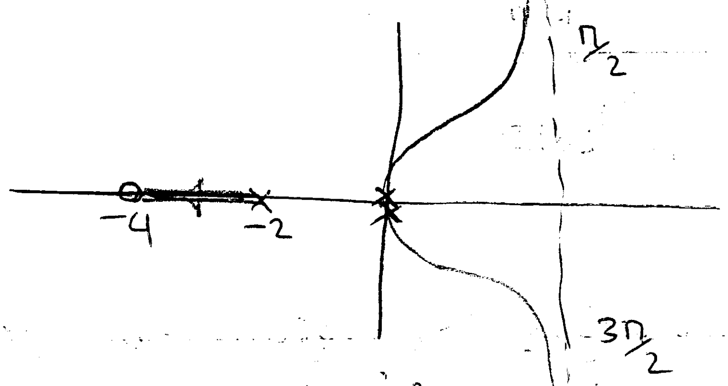
$$s^3+3s^2+(2+k)s-k=0$$

حل از آزمون روث :

1	2+k
3	-k
$\frac{6+4k}{3}$	
-k	

یک ریشه ناپایدار کننده از مکان هندسی هم همین بدست می آید.

$$GH(s) = \frac{k(s+4)}{s^2(s+2)} \quad \begin{matrix} \longrightarrow z_i = 4 \\ \longrightarrow P_i = 0, 0, -2 \end{matrix}$$



عده مجانب ها : عده مجانب ها $= 3-1 = 2$

محل همرسی $= \dfrac{[0+0-2]-[-0]}{3-1}$

$= 1$

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{2} \begin{matrix} \nearrow \pi/2 \\ \searrow 3\pi/2 \end{matrix}$$

دوم : $1+GH = s^2(s+2)+k(s+4) = 0$

سه ریشه دارد که به شکل 3 تا شاخه در شکل

نشان داده شده.

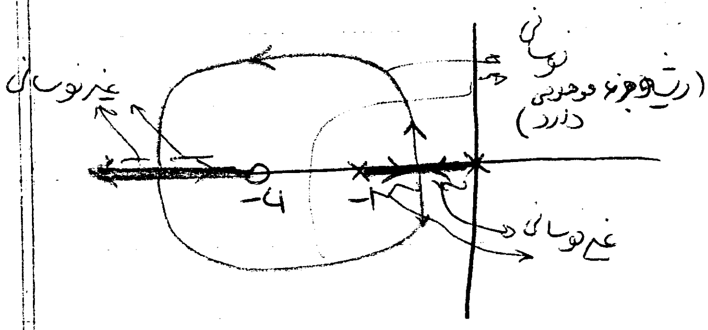
همواره دو ریشه سمت راست محور موهومی است پس سیستم ناپایدار است:

همواره " " ناپایدار کننده دارد.

از آزمون روث :

1	k
2	4k
$-k$	
$4k$	

$$GH(S) = \frac{k(S+4)}{S(S+1)}$$



تعداد مجانب ها : $1 = 2 - 1$

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pi$$

پایداری سیستم : همواره پایدار است.

$$1+GH=0 \longrightarrow 1+\frac{k(S+4)}{S(S+2)}=0$$

$$S^2+(2+k)S+4k=0$$

1	4k
2+k	
4k	

نوسانی و غیرنوسانی بودن سیستم :

در مقادیر خیلی کم و خیلی زیاد k غیرنوسانی است و در مقادیر متوسط k نوسانی است

مثال:

$$\frac{k}{S(S+1)(S+2)}$$

$P_i = 0$ و -1 و -2

صفر هم نداریم.

$n = 3$

$m = 0$

تعداد مجانب ها $= 3$

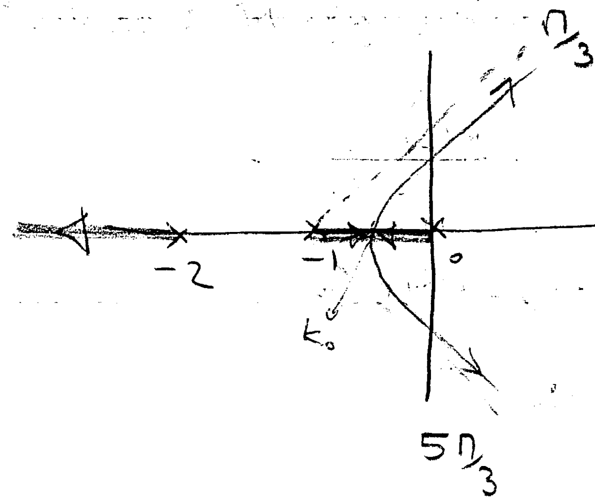
$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$\pi/3$

π

$5\pi/3$

$$\gamma = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m} = \frac{[0-1-2]-[0]}{3} = -1$$



$0 < K < K_0$ غیر نوسانی

$K_0 < K$ نوسانی

آنالیز ریشه ها:

پایداری: در بهره های پایین پایدار و در بهره های بالا ناپایدار است،

K پایداری:

$$1 + \frac{k}{S(S+1)(S+2)} = 0$$

$$S(S+1)(S+2) + K = 0$$

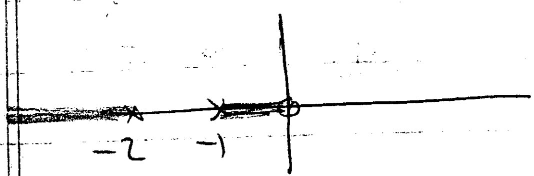
بجای مخرج مشترک گرفتن مخرج را با K جمع کنید (یا صورت جمع کنید).

1	2
3	k
$\frac{6-k}{3}$	
k	

$0<k<6$ پایدار

$k>6$ ناپایدار :

سال ۸۳ ، تست ۱۰۲ :



1) $-\sqrt{2}$ 3) -3

2) $-\frac{3}{2}$ ✓4) نقطه جدایی ندارد.

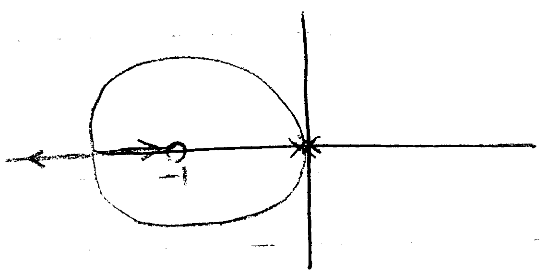
تست ۱۰۰ سال 83

$$G(s)=\frac{k(s+1)}{s^2}$$

نقطه جدایی :

1) -3 3) -2.5

2) -2 4) -1



دوتا صفر (۰) داریم

$$\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s+1}=\frac{2}{s} \Rightarrow s=2s+2$$

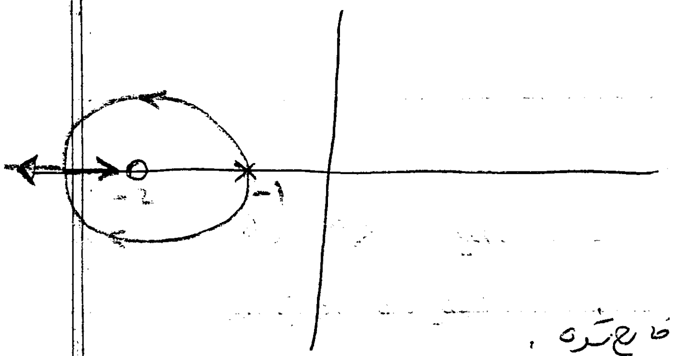
$$\rightarrow \boxed{s=-2}$$

توجه : هم جدایی هم به هم رسیدن از فرمول :

$$\cancel{\frac{1}{\Sigma P_i}=\frac{1}{\Sigma Z_i}}$$

$$\Sigma\frac{1}{s-p_i}=\Sigma\frac{1}{s-z_i}$$

سال 82، تست 101:



$$GH(s) = \frac{k(s+2)}{(s+1)^2}$$

چون دو تا شاخه از 1- خارج شده.

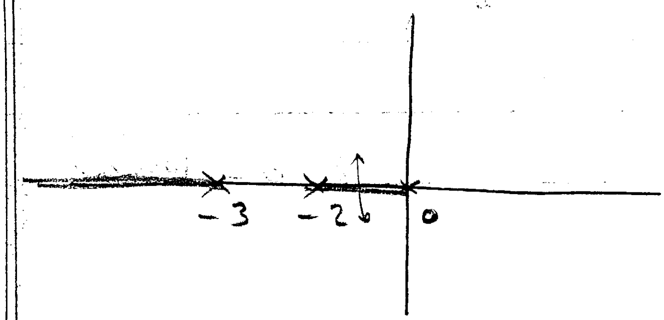
* برای سؤالات نقطه جدایی مکان را رسم کنید:

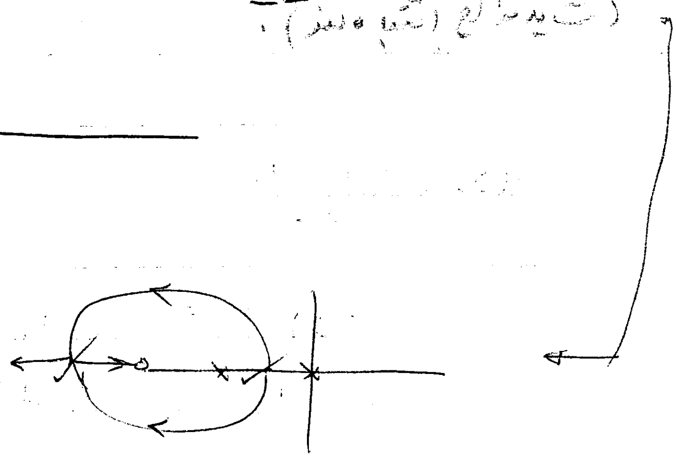
تست 103، سال ۸۲

$$G(s) = \frac{k}{s(s+2)(s+3)}$$

✓ 1) -0.78
2) -2.54
3) $0.78, -3.54$
4) $-0.78, -2.54$

* توجه: نقطه به هم رسیدن هم در نظر بگیرید.





← صفر مفهوم فیزیکی ندارد.

* اگر Feed back مثبت داشته باشیم قواعد رسم مکان ⊙:

دو تغییر داریم: 1) $\theta = \frac{2k\pi}{n-m}$

2) آن قسمتی از محور حقیقی جزء مکان است که عده صفرها و قطب های سمت راست آن زوج باشد.

* اگر تابع انتقال در صورت $e^{-\tau_d s}$ (ترم تأخیر زمانی) داشت.

توجه: اگر سیستمی ترم تأخیر زمانی داشته باشد پایداری آن با آزمون روث قابل بررسی نیست.

$$G(s) = \dots e^{-\tau_d s}$$

تقریب Pad:

$$e^{-\tau_d s} = \frac{e^{-\tau_d/2 \times s}}{e^{+\tau_d/2\, s}}$$

از بسط تیلور خطی

$$= \frac{1-\tau_d/2\, s}{1+\tau_d/2\, s} = -\frac{s-\frac{2}{\tau_d}}{s+\frac{2}{\tau_d}}$$

یعنی ترم تأخیر زمانی وقتی از تقریب Pad استفاده شود باعث افزودن یک صفر در سمت راست و یک قطب در سمت چپ می گردد و همچنین علامت فیدبک را تغییر می دهد.

چون ترم تأخیر زمانی ~~قطب~~ صفر در سمت راست ایجاد می کند و از آنجا که مکان به صفر ختم می شود پس پایداری سیستم را تحت تأثیر قرار می دهد یعنی یا کلاً سیستم را ناپایدار می کند یا حد K پایداری را کاهش می دهد (محدوده K ~~(~~ پایداری را کوچک می کند).

* اثر کنترلرها بر مکان هندسی :

$$K_c \longrightarrow K_c(1+\tau_D S)$$

عامل مشتق چه اثری بر مکان دارد :

$$GH = \frac{K(\tau_D S+1)\cdots}{\cdots}$$

عامل مشتق یک صفر در سمت چپ محور موهومی ایجاد می کند :

$$Z_1 = -\frac{1}{\tau_D}$$

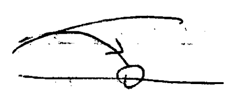
عامل مشتق باعث :

۱) ایجاد یک صفر در سمت چپ محور موهومی می گردد.

۲) موجب بهبود پایداری سیستم می شود یعنی یا سیستم را پایدار می کند یا K پایداری را افزایش می دهد.

۳) تعداد مجانب ها را یک کم می کند

۴) نوسانات سیستم را کاهش می دهد. چون ،



۵) سرعت پاسخ را زیاد می کند (اضافه صفر مخرج وصورت کم شود سرعت پاسخ زیاد می شود).

۶) محل هم رأسی مجانب ها را به سمت راست محور موهومی شیفت می دهد. ← عکس است به صفر نزدیکتر

تیپسی $\delta = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m}$

$$\delta^* = \frac{\sum P_i - \left[\sum Z_i - \frac{1}{\tau_D}\right]}{n-(m+1)}$$

صورت بزرگ تر
مخرج کوچک

τ_D اگر خیلی کوچک باشد هم رأسی به سمت راست انتقال یافته و ناپایدار می گردد

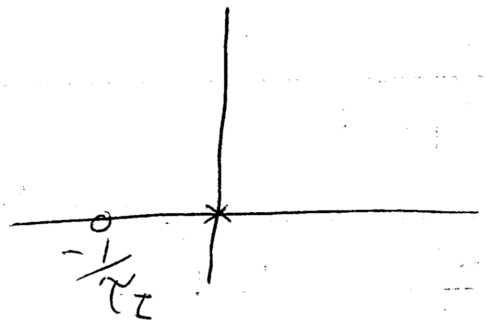
یادآوری: عامل مشتق بر offset تأثیری ندارد.

* اثر عامل انتگرالی:

$$K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)$$

$$= K_c \frac{\tau_I s+1}{\tau_I s}$$

$$\to \quad GH(s) = \frac{K(\tau_I s+1)\cdots}{\tau_I s \cdots}$$



عامل انتگرالی یک قطب در $s=0$ و یک صفر در $-1/\tau_I$ به مکان اضافه می‌کند

نمی‌توان گفت به پایداری کمک می‌کند یا نه، محل ~~اثر~~ همرسی مجانب‌ها را به سمت محور موهومی شیفت می‌دهد.

$$\gamma = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m}$$

با کنترل PI $\quad \gamma^* = \frac{(\sum P_i + 0) - (\sum Z_i - \frac{1}{\tau_I})}{(n+1)-(m+1)}$

$$= \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m} + \frac{1}{\tau_I (n-m)}$$

$$\gamma^* = \gamma + \frac{1}{\tau_I (n-m)} \longrightarrow$$ میزان ~~همرسی~~ جابجایی همرسی مجانب‌ها به سمت راست محور موهومی

← میزان جابجایی همرسی مجانب‌ها به سمت راست محور موهومی.

پاسخ فرکانسی

$$x(S) \longrightarrow \boxed{G(S)} \longrightarrow y(S)$$

* از آنجا که تمامی ورودی های دیگر را می توان بصورت بسط sin نوشت سیستمی که به ورودی سینوسی پایدار است به بقیه ورودی ها هم پایدار است.

$$x(t) = A \sin \omega t$$

$$y(t) = ?$$

$$\frac{y(S)}{X(S)} = G(S)$$

$$X(S) = \frac{A\omega}{S^2 + \omega^2}$$

$$y(S) = \frac{A\omega}{S^2+\omega^2} G(S)$$

$$G(S) = \frac{k N(S)}{D(S)}$$

$$= \underbrace{\frac{\quad}{S+i\omega} + \frac{\quad}{S-i\omega}}_{\text{تابع سینوسی با دامنه ثابت}} + \frac{\quad}{S-r_1} + \cdots + \frac{\quad}{S-r_n}$$

چون جزء حقیقی ندارد.

$$e^{r_1 t} + \cdots + e^{r_n t}$$

$$t \to \infty$$

اگر سیستم پایدار باشد تمام سایر ریشه ها در طول زمان حذف می شوند.

$$y(s) = \frac{a+bi}{s+i\omega} + \frac{a-bi}{s-i\omega}$$

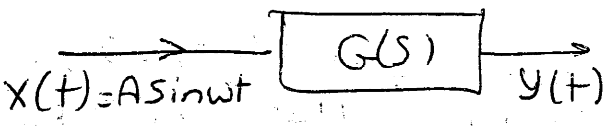
باید طرفین را $s+i\omega$ ضرب کرده

$x \sin\omega$ $\qquad \frac{A\omega}{s+i\omega} \times$

$$x\,(s-i\omega\, x) \longrightarrow G(s) = \frac{(a+bi)(s-i\omega)}{s+i\omega} + a - bi$$

$$s = i\omega \longrightarrow \quad \frac{A\omega}{2i\omega}\, G(i\omega) = 0 + a - bi$$

خلاصه پاسخ فرکانسی



$$y(t) = \underbrace{AR}_{\text{نسبت دامنه‌ها}} \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

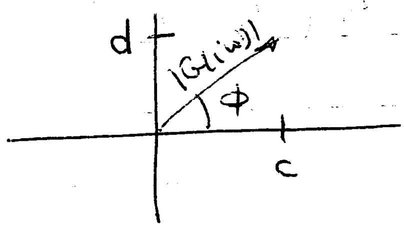
داریم:

1) $s = i\omega$

2) $G(i\omega) = c + di$ (درنهایت $G(i\omega)$ را باید به صورت بدست می آوریم)

3) $AR = |G(i\omega)| = \sqrt{c^2 + d^2}$

4) $\phi = \measuredangle G(i\omega) = \tan^{-1}\frac{d}{c}$



مثال:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

$$G(i\omega) = \frac{K}{\tau\omega i + 1} \times \frac{1 - \tau\omega i}{1 - \tau\omega i}$$

$$= \frac{1}{1+\tau^2\omega^2} - \frac{\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2}\, i$$

$$AR = \sqrt{\left[\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}\right]^2 + \left[\frac{\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2}\right]^2}$$

$$AR = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

$$\Phi = \tan^{-1}[-\omega\tau]$$

مثال: (سیستم درجه ۲)

$$\frac{\cancel{k}\ 1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

$$s = i\omega$$

$$= \frac{1}{-\tau^2\omega^2 + 2\xi\tau\omega i + 1} \times \frac{(1-\tau^2\omega^2) - 2\xi\tau\omega i}{(1+\tau^2\omega^2) - 2\xi\omega\tau i}$$

$$= \frac{1-\tau^2\omega^2}{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\omega\tau)^2} - \frac{2\xi\omega\tau}{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\omega\tau)^2} i$$

$$= a + bi$$

$$AR = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\omega\tau)^2}}$$

$$\Phi = \tan^{-1}\left[\frac{-2\xi\omega\tau}{1-\tau^2\omega^2}\right]$$

$$X(S) \longrightarrow \boxed{G(S)} \longrightarrow Y(S)$$

$$x(t) = A\sin(\omega t)$$

$$y(t) = ?$$

1) $S = i\omega$

2) $G(i\omega) = a + bi$

3) $AR = |G(i\omega)| = \sqrt{a^2+b^2}$

4) $\varphi = \measuredangle G(i\omega) = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

5) $y(t) = AR \cdot A\sin(\omega t + \varphi)$

مثال:

$$G(S) = e^{-\tau_d S}$$

1) $S = i\omega$

2) $G(i\omega) = e^{-i\omega\tau_d} = \cos\omega\tau_d - i\sin\omega\tau_d$

3) $AR = \sqrt{\cos^2\omega\tau_d + \sin^2\omega\tau_d} = 1$

4) $\varphi = \tan^{-1}\left[\frac{-\sin\omega\tau_d}{\cos\omega\tau_d}\right] = -\tan^{-1}[\tan\omega\tau_d]$

$$\varphi = -\omega\tau_d$$

5) $y(t) = 1 \times A\sin(\omega t - \omega\tau_d)$

مثال: √ مهم

$$G(S) = \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}S}}{S(S+1)}$$

$$x(t) = 2\sin t$$

$$y(t) = ?$$

1) $S = i\omega$

2) $\cos(i\omega) = \dfrac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}\omega i}}{(i\omega)(i\omega+1)}$

به سادگی قابل انجام نیست .

تصحیح : (برای اطلاعات) :

I) $|Z_1 . Z_2| = |Z_1||Z_2|$

II) $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$

III) $\measuredangle Z_1 Z_2 = \measuredangle Z_1 + \measuredangle Z_2$

IV) $\measuredangle \dfrac{Z_1}{Z_2} = \measuredangle Z_1 - \measuredangle Z_2$

ادامه مثال :

3) $AR = |G(i\omega)| =$

$$= \frac{\sqrt{2} * 1}{\omega * \sqrt{\omega^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{1 \times \sqrt{2}} = 1$$

4) $\varphi \measuredangle G(i\omega) = \underbrace{\left\{0 + \left(-\frac{\pi}{4}\omega\right)\right\}}_{\text{زاویه صورت}} - \underbrace{\left\{\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\omega\right\}}_{\text{زاویه مخرج}}$

$$= -\frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} 1$$

$$= -\pi$$

$y(t) = 1 \times 2 \sin(t - \pi) = -\sin t$

مثال :

$$G(S) = \frac{1}{\tau S + 1}$$

$$G(i\omega) = \frac{1}{\tau(i\omega)+1}$$

$$AR = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 s^2 + 1}} \qquad \phi = 0 - \tan^{-1}(\omega\tau)$$

مثال :

$$\frac{1}{\tau^2 \underset{\omega^2}{s^2} + 2\xi\tau \underset{i\omega}{s} + 1}$$

$$AR = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2 + (2\xi\omega\tau)^2}}$$

$$\Phi = 0 - \tan^{-1}\left[\frac{2\xi\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2}\right]$$

سال ۸۲ تست ۸۸ :

$$G(S) = \frac{1}{\underset{-16}{S^2} + \underset{4i}{S} + 1}$$

$$x(t) = 5\sin(4t)$$

دامنه خروجی = ?

$$AR = \frac{1}{\sqrt{(1-16)^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{241}}$$

(P) Mode ماشین حساب [illegible]
باید رادیان باشد

$$\text{دامنه خروجی} = AR \cdot A = \frac{1}{\sqrt{241}} \times 5$$

* یکی از سؤالات از همین قسمت می‌آید.

دیاگرام بُد : Bode diagram

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

1) $s = i\omega$

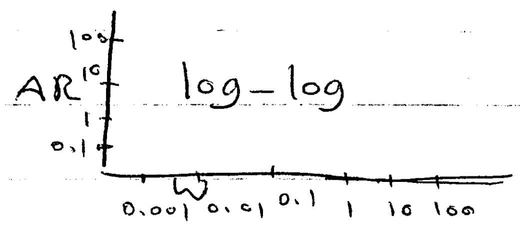
2) $G(i\omega) = a + bi$

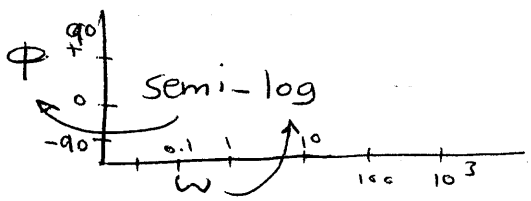
3) $AR = |G(i\omega)| = f(\omega)$

4) $\phi = \measuredangle G(i\omega) = g(\omega)$

دیاگرام بد دیاگرامی است که AR و ϕ برحسب ω رسم شده است.

$0 < \omega < \infty$





مثال : سیستم مرتبه اول (درجه اول)

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$G(i\omega) = \frac{1}{\tau \omega i + 1}$$

$$AR = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \qquad \phi = -\tan^{-1}(\omega \tau)$$

$$\log AR = -\tfrac{1}{2}\log(1+\tau^2\omega^2)$$

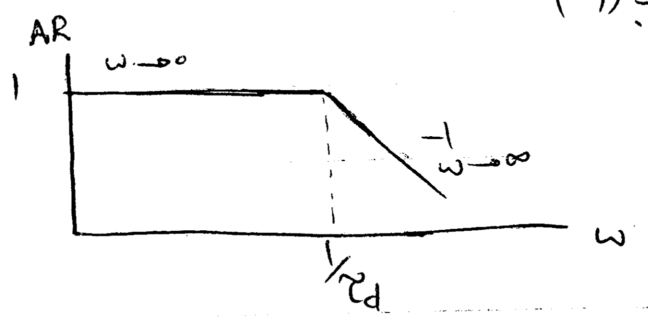
1) $\omega \to 0 \longrightarrow AR = 1 \longrightarrow \log AR = 0$

2) $\omega \to \infty \longrightarrow \omega\tau \gg 1$

$$\log AR = -\tfrac{1}{2}\log(\omega\tau)^2$$

$$\log AR = -\log\omega\tau$$

یعنی دیاگرام مجانب های بد برای سیستم مرتبه اول در ω های زیاد خطی است با شیب (-1)



محل تلاقی مجانب های Bode :

$$\begin{cases} AR = 1 \\ \log AR = -\log\omega\tau_d \end{cases}$$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\tau_d}}$$

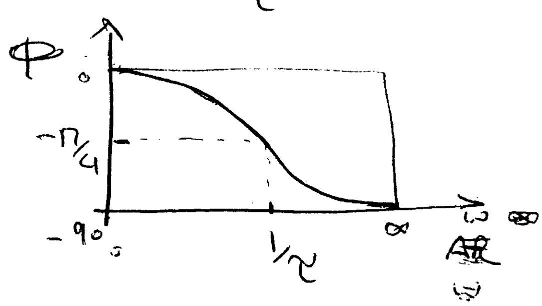
توجه [illegible]

$$\varphi = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

$\omega = 0 \longrightarrow \varphi = 0$

$\omega = \infty \longrightarrow \varphi = -\pi/2$

$\omega = 1/\tau \longrightarrow \varphi = -\pi/4$



مثال: (سیستم مرتبه 2 (درجه 2))

$$G(S) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

$$AR = \frac{1}{\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\omega\tau)^2}}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{2\xi\tau\omega}{1-\tau^2\omega^2}$$

$$\log AR = -\frac{1}{2}\log\left[(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\omega\tau)^2\right]$$

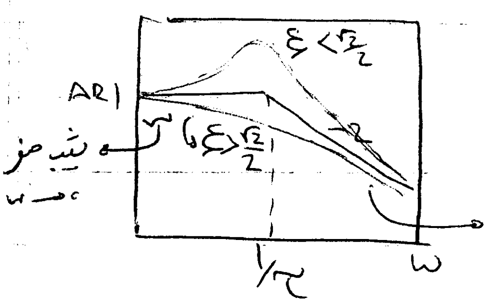
$\omega \to 0 \Rightarrow AR = 0$

$\omega \to \infty$. از بقیه جملات بزرگتر است $\omega \to \infty$

$$\log AR = -\frac{1}{2}\log(\omega\tau)^4$$

$$\log AR = -2\log\omega\tau$$

یعنی دیاگرام مجانب های بر سیستم مرتبه 2 در ω های زیاد خطی است با شیب (-2) .



سؤال: اثر ξ بر دیاگرام Bode چیست.

شیب $= -2$
$\omega \to \infty$

$AR > 1 \Leftarrow \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$AR < 1 \Leftarrow \xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$

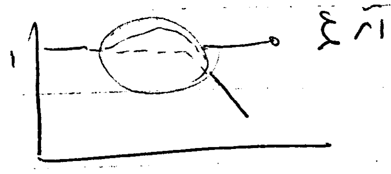
$$\frac{dAR}{d\omega} = 0$$

شرایطی که در آن

تحت آن شرایط $|AR| > 1$ را پیدا کنیم .

$$\boxed{\omega_{max} = \frac{1}{\tau}\sqrt{1-2\xi^2}}$$

در تمام حالات :



$$\frac{dAR}{d\omega} = 0 \longrightarrow \omega_{max} = \frac{1}{\tau}\sqrt{1-2\xi^2}$$

یعنی تحت هر ξ ، max نداریم و باید $\sqrt{1-2\xi^2} \geq 0 \longrightarrow \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\phi = -\tan^{-1}\left[\frac{2\xi\omega\tau}{1-\tau^2\omega^2}\right]$$

$$\omega = 0 \longrightarrow 0$$

$$\omega = 1/\tau \longrightarrow -\pi/2$$

$$\omega = \infty \longrightarrow -\pi$$

$$\frac{1}{\tau^2 s^2 + \cdots} = \frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

مهم نیست .

* یعنی درجه اول بین ۰ تا 90 . برای سیستم درجه دوم (مثل اینکه حاصلضرب دو سیستم درجه اول است) حاصلجمع دو سیستم درجه اول : ۰ تا 180 است .

مثال : درجه یک بصورت :

$$G(s) = \tau s + 1$$

$$G(i\omega) = \omega\tau i + 1$$

$$AR = \sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}$$

$$\phi = \tan^{-1}(\omega\tau)$$

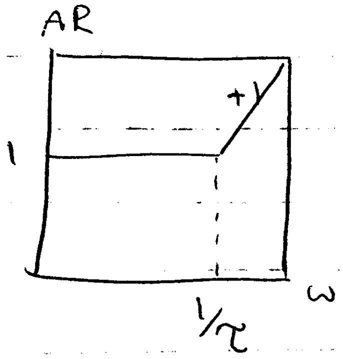
$$\log AR = \frac{1}{2}\log(1+\tau^2\omega^2)$$

$$\omega \to 0 \longrightarrow AR = 1$$

$$\omega \to \infty \longrightarrow \omega\tau \gg 1 \qquad \log AR = 1/2 \log(\omega\tau)^2$$

$$\log AR = \log \omega\tau$$

یعنی دیاگرام مجانب بر سیستم درجه اول بصورت خطی است با شیب (1+) در فرکانس های بالا .



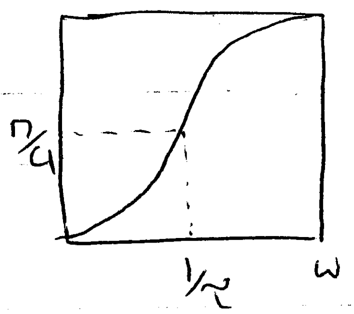
* درجه اول اگر در صورت باشد شیب +1 و اگر در مخرج باشد شیب -1 است.

$$\Phi = \tan^{-1}\omega\tau$$

$$\omega = 0 \longrightarrow \Phi = 0$$

$$\omega = \infty \longrightarrow \Phi = \pi/2$$

$$\omega = 1/\tau \longrightarrow \Phi = \pi/4$$



* درجه اول باشد در صورت زاویه بین 0 تا +90

" " در مخرج " " 0 تا -90

* درجه یک سیستم اگر n باشد در این صورت :

الف) اگر این عبارت در صورت باشد شیب مجانب آن Bode ، +n.

" " " مخرج باشد " " " " -n.

ب) اگر در صورت باشد زاویه بین 0 و $n\pi/2$

" مخرج باشد زاویه بین 0 و $-\frac{n\pi}{2}$

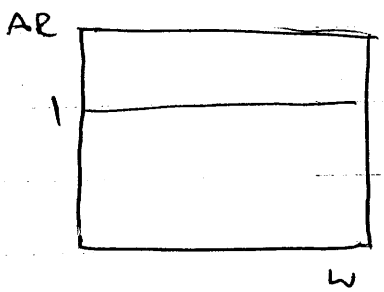
مثال:

$$G(S) = e^{-\tau_d S}$$

$$AR = 1$$

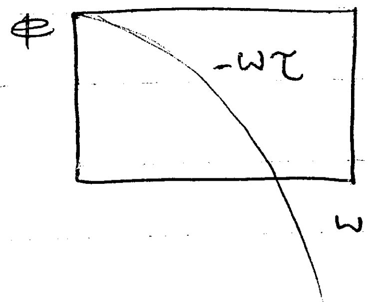
$$\phi = -\omega \tau_d \quad \begin{cases} \omega = 0 \rightarrow \phi = 0 \\ \omega = \infty \rightarrow \phi = -\infty \end{cases}$$

* ترم تأخیر زمانی اثری بر دیاگرام AR ندارد.



$\phi = -\infty$ $\omega \rightarrow \infty$: یعنی در فرکانس‌های بالا زاویه به سمت عدد خاصی میل نمی‌کند.

* ترم تأخیر زمانی فقط بر منحنی ϕ اثر دارد.



مثال:

$$G(S) = \frac{1}{S^n}$$

$$G(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^n} \rightarrow \underbrace{(i\omega) \cdots (i\omega)}_{n \text{ مرتبه}}$$

$(i\omega) \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$

$\underbrace{(i\omega) \cdots (i\omega)}_{n \text{ مرتبه}} \rightarrow \phi = \frac{n\pi}{2}$

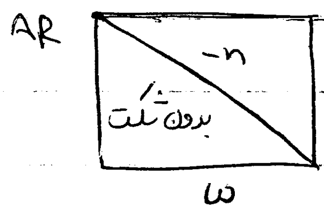
$$AR = \frac{1}{\omega^n}$$

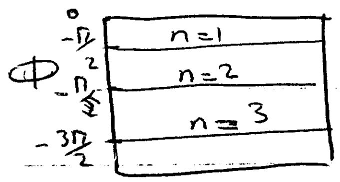
$$\phi = 0 - \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$$

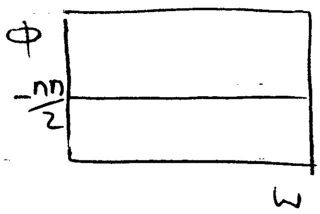
$$\phi = -\frac{n\pi}{2}$$

$AR = \frac{1}{\omega^n} \rightarrow \log AR = -n \log \omega$

نتیجه: * دیاگرام جانب‌ها برسیستم $\frac{1}{S^n}$ همواره خطی راست با شیب $(-n)$ و بدون شکست.







* حالت کلی

* تفاوت $\cancel{S^N}$ $\frac{1}{S^N}$ با $\frac{1}{(\tau S+1)^n}$ آن است که در اولی دیاگرام بُد فاقد نقطه شکست است ولی در دومی بالعکس.

در اولی زاویه خود $-\frac{n\pi}{2}$ است و در دومی از صفر تا $-\frac{n\pi}{2}$ است.

مثال:

$$G(S)=S^n$$

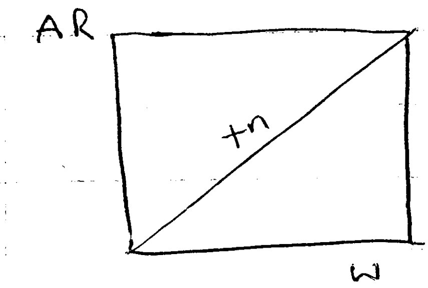
$$S=i\omega$$

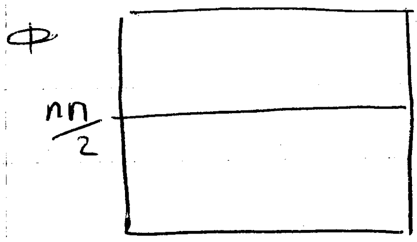
$$G(i\omega)=(i\omega)^n=\overbrace{\underbrace{(i\omega)}_{\frac{\pi}{2}}\dots(i\omega)}^{\text{n وقته}}$$

$$AR=\omega^n \longrightarrow \log AR=n\log\omega$$

$$\Phi=\frac{n\pi}{2}$$

* دیاگرام Bode S^n خطی با شیب $+n$ و بدون شکست است.





خلاصه:

نکته:

۱) به ازای هر دهه یک واحد شیفت داریم اگر درصورت بود ۱+ و اگر در مخرج بود ۱- اگر به فرم TS+1 بود فرکانس شکست دارد و اگر به فرم S بود فرکانس شکست ندارد.

* دهه: تعیین واحد شیفت   *صورت یا مخرج بودن: علامت
* S یا TS+1: تعیین داشتن و نداشتن شکست.

۲) به ازای هر دهه ۹۰ درجه زاویه داریم اگر درصورت بود ۹۰+، اگر در مخرج بود ۹۰-.

اگر TS+1 بود از صفر تا ۹۰

اگر S بود خود ۹۰.

فرکانس شکست

$$G(S)=\frac{2S+1}{S(S+1)}$$

$\Rightarrow +1,\ \omega_{co}=1/2=\frac{1}{\tau}$ فرکانس گوشه (corner)

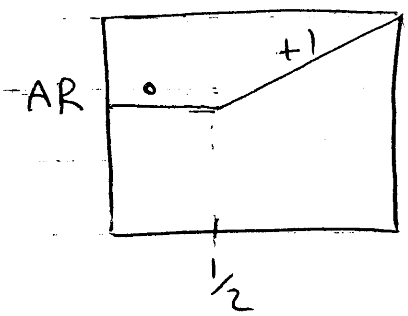
$-1,\ \omega_{co}=1$

چون AR برحسب ω لگاریتمی است پس

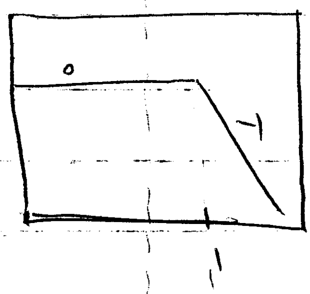
$$\log z_1 z_2=\log z_1+\log z_2$$

$$\log\frac{z_1}{z_2}=\log z_1-\log z_2$$

* یعنی شیب ها با هم جمع و تفریق جبری می شوند.

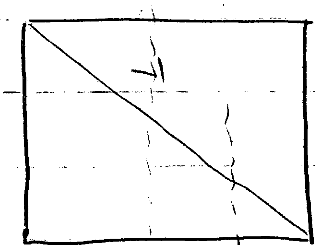


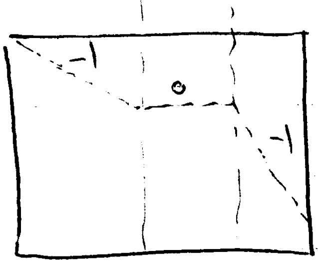
: $2S+1$



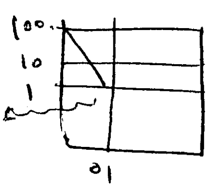
: $\frac{1}{S+1}$

: $\frac{1}{S}$



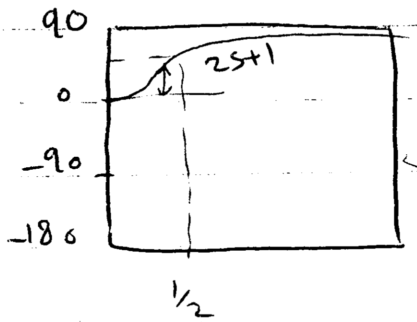


* در نقاط شکست تغییر شیب داریم.
* اگر این سیستم $e^{-\tau_d s}$ داشته معنی تغییر ندارد.
* توجه:



نسبت شیب

شیب $-2=\frac{-(\text{۲ واحد})}{\text{یک واحد}+}$

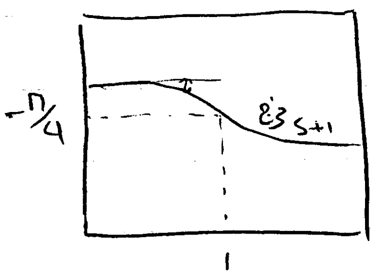


+90 تا ۰

$$\frac{(2s+1)}{s(s+1)}$$

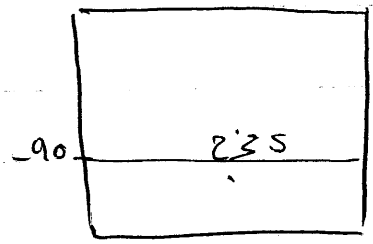
-90 ثابت

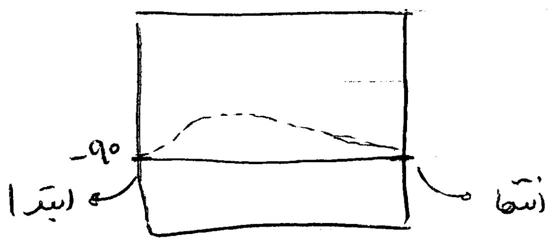
-90 تا ۰



شیب تند عوامل اول تند تر است.

پس مجموع ابتدا بالا می رود سپس پایین می آید.





برای پیدا کردن max :

$$\frac{d\Phi}{d\omega}=0$$

$$\Phi=\tan^{-1}2\omega-\left\{\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\omega\right\}$$

$$\frac{d\Phi}{d\omega}=\frac{2}{1+4\omega^2}-\frac{1}{1+\omega^2}=0\longrightarrow \omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

برای رسم Bode از قضیه پریم : AR

1) نوع = ؟ ← n ← (+n / −n) → 2) مخرج یا صورت ؟ → صورت +n / مخرج −n

3) به شکل $\tau s+1$ ← $\omega_{co}=1/\tau$

s ← $\omega_{co}=0$

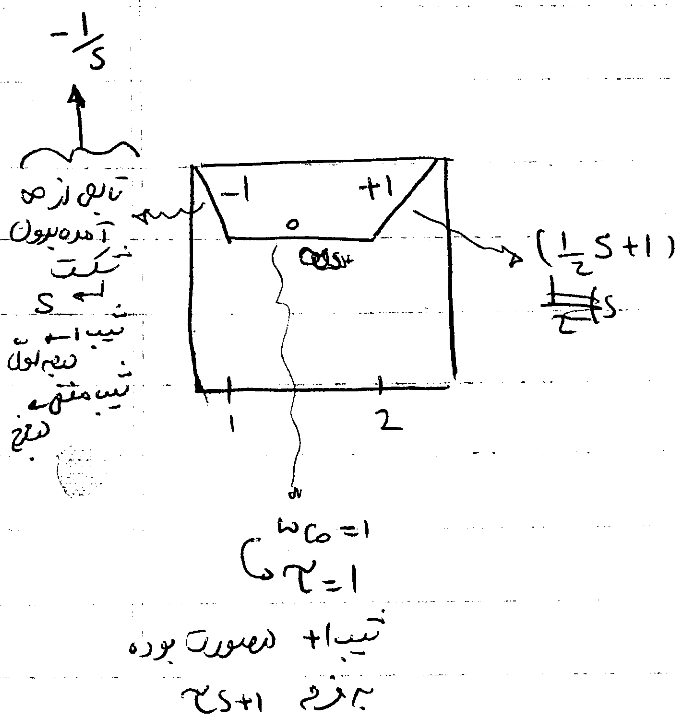
برای Φ :

نوع = ؟ n

	صورت	مخرج
$\tau(s+1)$ →	$0 \to n\pi/2$	$0 \to -n\pi/2$
s →	$n\pi/2$	$-n\pi/2$

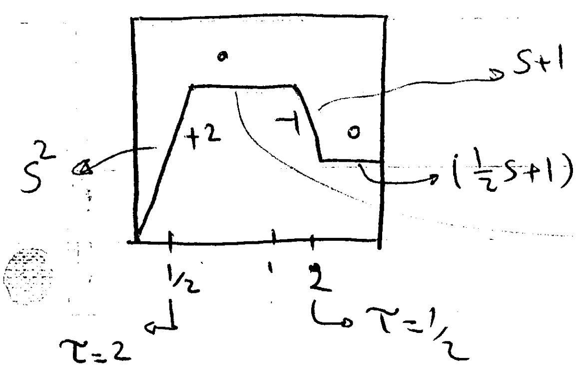
مثال :

$G(S)=?$



$$G(S)=\frac{(S+1)(\frac{1}{2}S+1)}{S}$$

مثال :



$$G(S)=\frac{S^2(\frac{1}{2}S+1)}{(2S+1)^2(S+1)}$$

* توجه : $2S+1$ همان $S+0.5$

$\frac{1}{2}S+1$ همان $S+2$

$G(s)$ می‌تواند همین $e^{-\tau_d s}$ هم داشته باشد (هر دو کی بینه صحیح است).