معادلات انتگرال

١-١ تعاريف

يك معادله انتگرال، معادله اي است كه در آن تابع مجهول u(x) زير علامت انتگرال قرار دارد.
يك نمونه از يك معادله انتگرال كه در آن u(x) تابع مجهولي است كه بايد معلوم شودبه صورت زير است.

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt. \qquad (١-١)$$

K(x,t) هسته معادله انتگرال ناميده مي شود. $\beta(x), \alpha(x)$ حدود انتگرال هستند. هسته معادله يعني K(x,t) و تابع f(x) از قبل معلوم هستند.

قاعده لايب نيتز:براي مشتق گرفتن از $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ نسبت به x قاعده لايب نيتز به صورت زير به كار مي رود:

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt = f(x,\psi(x))\frac{d\psi}{dx} - f(x,\varphi(x))\frac{d\varphi}{dx} + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x,t)dt. \qquad (٢-١)$$

تبديل انتگرال هاي چند گانه به يك انتگرال يك گانه,

لم. داريم:

$$a)\int_0^x\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

$$b)\int_0^x\int_0^x\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$

$$c)\int_0^x\int_0^x \dots \int_0^x f(t)\underbrace{dt \dots dt}_{n\text{تا}} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

اثبات a) فرض كنيم

$$I(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

كه در آن

$$I(0) = 0 \quad , \quad f(x,t) = x - t$$

بنا به قاعده لايب نيتز داريم:

$$I'(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad (٣-١)$$

از طرفين (١-٣) از 0 تا x انتگرال مي گيريم

$$\int_0^x I'(t)dt = \int_0^x\int_0^x f(t)dt$$

بنا به قضيه اساسي حساب ديفرانسيل و انتگرال داريم

$$I(x) - I(0) = \int_0^x\int_0^x f(t)dt \Rightarrow I(x) = \int_0^x\int_0^x f(t)dt.$$

١-٢ دسته بندي معادلات انتگرال خطي

١- معادلات انتگرال ولترا
٢- معادلات انتگرال فردهولم
٣- معادلات انتگرال- ديفرانسيل
٤- معادلات انتگرال منفرد

۱-۲-۱ معادلات انتگرال ولترا

شكل استاندارد معادلات انتگرال خطي ولترا, يعني معادلاتي كه حد پايين يا حد بالاي انتگرالگيري در آن به صورت تابعي از x ظاهر مي شود , به فرم زير مي باشد.

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-٤)$$

حالات خاص معادلات انتگرال ولترا:

الف) اگر $\phi(x) = 0$ ، معادلات انتگرال (۱-٤) به معادلات انتگرال ولترا نوع اول تبديل مي شود

$$f(x) + \lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt = 0 \qquad (۱-٥)$$

ب) اگر $\phi(x) = 1$, معادله (۱-٤) معادلات انتگرال ولترا نوع دوم ناميده مي شود كه

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-٦)$$

ج) اگر $f(x) = 0$ ، معادله (۱-٤) به معادلات انتگرال ولترا همگن تبديل مي شود

$$u(x) = \lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-٧)$$

د) در صورتي كه مشتقات u(x) در طرف چپ ظاهر شوند معادله انتگرال را يك معادله انتگرال- ديفرانسيل ولترا مي ناميم

$$u''(x) = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-٨)$$

۱-۲-۲ معادلات انتگرال خطي فردهولم

شكل استاندارد معادلات انتگرال خطي فردهولم , كه در آنها حد پائين وحد بالاي انتگرال گيري به ترتيب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زير مي باشد:

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-٩)$$

حالات خاص معادلات انتگرال فردهولم:

الف) اگر $\phi(x) = 0$, معادله (۱-٩) به معادله زير تبديل مي شود

$$f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt = 0$$

اين معادله را معادله انتگرال فردهولم نوع اول مي نامند.

ب) اگر $\varphi(x) = 1$ ، معادله (۱-٩) به معادله زير تبديل مي شود

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

به اين معادله انتگرال فردهولم نوع دوم مي گويند.

ج) اگر $f(x) = 0$ ، معادله (۱-٩) به شكل زير در خواهد آمد

$$u(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

كه آن را معادله انتگرال فردهولم همگن گويند.

۱-۲-۳ معادلات انتگرال منفرد

در صورتیکه یکي حدود انتگرال یا هر دو ∞ باشند و یا هسته معادلات انتگرال یعني k(x,t) در فاصله انتگرالگیري نقاط انفصال داشته باشد معادله انتگرال را منفرد گویند مانند:

$$u(x)=\int_0^{\infty}(x-t)^{\alpha}u(t)dt \qquad \text{یا} \qquad u(x)=\int_0^{\infty}\frac{u(t)dt}{\sqrt{x-t}}$$

مثال ۱. معادله دیفرانسیل $y''+y'=\cos x$ با مقدار اولیه $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ را در نظر بگیرید مطلوب است محاسبه معادله انتگرال متناظر با معادله فوق.

حل: در نظرمي گیریم

$$y''(x)=u(x) \qquad (۱-۱۰)$$

از طرفین (۱-۱۰) از 0 تا x انتگرال مي گیریم

$$\int_0^x y''(t)dt=\int_0^x u(t)dt \Rightarrow y'(x)-y'(0)=\int_0^x u(t)dt \qquad (۱-۱۱)$$

با قرار دادن مقدار اولیه در (۱-۱۱) داریم

$$y'(x)=1+\int_0^x u(t)dt \qquad (۱-۱۲)$$

دوباره از طرفین (۱-۱۲) از 0 تا x انتگرال مي گیریم

$$\int_0^x y'(t)dt=\int_0^x dt+\int_0^x\int_0^x u(t)dt$$

$$y(x)-y(0)=x+\int_0^x\int_0^x u(t)dt \qquad (۱-۱۳)$$

با توجه به معادله (۱-۱۳) را مي توان به صورت زیر نوشت

$$y(x)=x+\int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (۱-۱۴)$$

با جایگذاري تساویهاي (۱-۱۰) و (۱-۱۴) در معادله $y''+y=\cos x$ داریم

$$u(x)+x+\int_0^x (x-t)u(t)dt=\cos x$$

$$u(x)=\cos x-x-\int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (۱-۱۵)$$

که معادله (۱-۱۵) متناظر با معادله انتگرال ولتراي نوع دوم به شکل زیر است

$$u(x)=f(x)+\int_0^x k(x,t)u(t)dt.$$

مثال۲. معادله انتگرال متناظر با معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ناهمگن با مقدار مرزي زیر را بدست آورید

$$y''+y=x,\quad 0\le x\le\pi,\quad y(0)=1,\quad y(\pi)=\pi-1 \qquad (۱-۱۶)$$

حل: مانند مثال قبل ابتدا قرار مي دهیم

$$y''(x)=u(x) \qquad (۱-۱۷)$$

$$\int_0^x y''(t)dt=\int_0^x u(t)dt \Rightarrow y'(x)-y'(0)=\int_0^x u(t)dt$$

$$y'(x)=c+\int_0^x u(t)dt \qquad (۱-۱۸)$$

از معادله (١-١٨) از 0 تا x انتگرال مي گيريم

$$\int_0^x y'(t)dt = cx + \int_0^x\int_0^x u(t)dt \Rightarrow y(x) - y(0) = cx + \int_0^x\int_0^x u(t)dt$$

با توجه به لم و مقدار اوليه داريم

$$y(x) = 1 + cx + \int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (١٩-١)$$

براي پيدا كردن مقدار ثابت c از شرايط اوليه استفاده مي كنيم

$$y(\pi) = 1 + c\pi + \int_0^\pi (\pi - t)u(t)dt \Rightarrow c = \frac{\pi - 2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)u(t)dt \qquad (٢٠-١)$$

با قرار دادن (١-٢٠) در (١-١٩) داريم

$$y(x) = 1 + \frac{x}{\pi}(\pi - 2) - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)u(t)dt + \int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (٢١-١)$$

تساويهاي (١-١٧) و (١-٢١) را در معادله (١-١٦) قرار مي دهيم

$$u(x) + 1 + \frac{x}{\pi}(\pi - 2) - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)u(t)dt + \int_0^x (x-t)u(t)dt = x$$

$$u(x) = (\frac{2}{\pi}x - 1) + \frac{x}{\pi}\left[\int_0^x (\pi - t)u(t)dt + \int_x^\pi (\pi - t)u(t)dt\right] + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$u(x) = (\frac{2}{\pi}x - 1) + \int_0^x (x - \frac{xt}{\pi} - x + t)u(t)dt + \int_x^\pi (x - \frac{xt}{\pi})u(t)dt$$

$$u(x) = (\frac{2}{\pi}x - 1) + \int_0^x \frac{t(\pi - x)}{\pi}u(t)dt + \int_x^\pi \frac{x(\pi - t)}{\pi}u(t)dt$$

$$u(x) = (\frac{2}{\pi}x - 1) - \int_0^\pi k(x,t)u(t)dt$$

معادله انتگرال فردهولم نوع دوم است كه در آن

$$k(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(\pi - t)}{\pi}, & x \le t \le \pi \\ \dfrac{t(\pi - x)}{\pi}, & 0 \le t \le x \end{cases}$$

مثال ٣. معادله انتگرال متناظر با معادله ديفرانسيل با مقادير مرزي زير را بدست آوريد

$$y'' + xy' + y = 0 \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0 \qquad (٢٢-١)$$

حل: ابتدا قرار مي دهيم

$$y''(x) = u(x) \qquad (٢٣-١)$$

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(t)dt \Rightarrow y'(x) = \int_0^x u(t)dt \qquad (٢٤-١)$$

$$y(x) - y(0) = \int_0^x\int_0^x u(t)dt \Rightarrow y(x) = 1 + \int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (٢٥-١)$$

تساويهاي (١-٢٣) و (١-٢٤) و (١-٢٥) را درمعادله (١-٢٢) قرار مي دهيم

$$u(x)+x\int_0^x u(t)dt+1+\int_0^x (x-t)u(t)dt=0$$

$$u(x)=-1-\int_0^x (2x-t)u(t)dt. \qquad (١-٢٦)$$

معادله (١-٢٦) معادله انتگرال ولتراي نوع دوم است.

تمرين:

معادلات انتگرال متناظر با معادلات ديفرانسيل با مقادير مرزي زير را بدست آوريد

1) $y''+2xy=1 \quad , \quad 0\le x\le 1, \qquad y(0)=y(1)=0$

2) $y''+y=x, \qquad 0\le x\le 1, \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0$

قضيه: معادله انتگرال فردهولم ناهمگن $u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt$ فقط و فقط وقتي داراي جواب منحصربفرد است كه معادله فردهولم همگن $u(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt$ فقط داراي جواب بديهي $u(x)=0$ باشد.

١-٢-٤ روش تجزيه آدوميان براي حل معادلات انتگرال فردهولم ناهمگن:

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (١-٢٧)$$

سري زير را كه به u(t) همگرا است تعيين مي كنيم:

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=u_0(x)+u_1(x)+...+u_n(x)+... \qquad (١-٢٨)$$

با جايگذاري (١-٢٨) در(١-٢٧) داريم

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)dt$$

$$u_0(x)+u_1(x)+...+u_n(x)+...=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u_0(t)dt+\lambda\int_a^b k(x,t)u_1(t)dt+...$$

با مساوي قرار دادن جملات طرفين تساوي داريم

$$u_0(x)=f(x)$$

$$u_1(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)u_0(t)dt=\lambda\int_a^b k(x,t)f(t)dt$$

$$u_2(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)u_1(t)dt=\lambda^2\int_a^b k(x,t)\left(\int_a^b k(x,t)f(t)dt\right)dt$$

$$\vdots$$

$$u_k(x)=\lambda^k\int_a^b k(x,t)\left(\int_a^b k(x,t)\left(....\int_a^b k(x,t)f(t)dt....\right)dt\right)dt.$$

مثال١: معادله انتگرال زير را با روش تجزيه ادوميان حل كنيد

$$u(x)=(\cos x+2x)+\int_0^{\pi}(xt)u(t)dt$$

حل: با توجه به معادلات انتگرال فردهولم داریم

$$u_0(x)=f(x)=\cos x+2x \quad , \qquad k(x,t)=xt\,, \quad \lambda=1$$

$$u_1(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)u_0(t)dt=\int_0^\pi xt(\cos t+2t)dt=(-2+\frac{2}{3}\pi^3)x$$

$$u_2(x)=\int_0^\pi xt(-2+\frac{2}{3}\pi^3)tdt=(-\frac{2}{3}\pi^3+\frac{2}{9}\pi^6)x$$

$$\vdots$$

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\cos x+2x+(-2x+\frac{2}{3}\pi^3x)+(-\frac{2}{3}\pi^3x+\frac{2}{9}\pi^6x)+\dots$$

$$u(x)=\cos x.$$

۱-۲-۵ روش محاسبه مستقیم در حل معادلات انتگرال فردهولم نوع دوم:

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۲۹)$$

در این حالت هسته k(x,t) بصورت زیر تجزیه پذیر است

$$k(x,t)=g(x)h(t) \qquad (۱-۳۰)$$

تساوي (۱-۳۰) را در (۱-۲۹) قرار مي دهيم

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b g(x)h(t)u(t)dt$$

$$u(x)=f(x)+\lambda g(x)\int_a^b h(t)u(t)dt$$

قرار مي دهيم: $\int_a^b h(t)u(t)dt=\alpha$ (۱-۳۱)

بايستي مقدار α را تعيين كنيم و از (۱-۲۹) و (۱-۳۱) نتيجه مي شود

$$u(x)=f(x)+\lambda g(x)\alpha \qquad (۱-۳۲)$$

رابطه (۱-۳۲) را در معادله (۱-۳۱) قرار مي دهيم

$$\alpha=\int_a^b h(t)\big(f(t)+\lambda g(t)\alpha\big)dt \qquad (۱-۳۳)$$

از معادله (۱-۳۳) مقدار α محاسبه مي شود و با قرار دادن مقدار α در (۱-۳۲)، u(x) بدست مي آيد.
در حالت كلي هسته معادله انتگرال فردهولم به صورت تجزيه مي شود

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{n}g_i(x)h_i(t)$$

مثال۱: معادله انتگرال فردهولم زير را با روش مستقيم حل كنيد

$$u(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^1 xt.u(t)dt \qquad (۱-۳۴)$$

حل: قرار مي دهيم: (۱-۳۵) $\alpha=\int_0^1 tu(t)dt$

با قرار دادن (۱-۳۵) در (۱-۳۴) نتيجه مي شود

$$u(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}x\alpha \qquad (۱-۳۶)$$

با قرار دادن (۱-۳۶) در (۱-۳۵) مقدار α محاسبه مي شود

$$\alpha=\int_0^1(\frac{5}{6}t^2+\frac{1}{2}t^2\alpha)dt \Rightarrow \alpha=\frac{5}{6}.\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{1}{3}$$

با جايگذاري مقدار α در (۱-۳۶) ، u(x) بدست مي آيد كه

$$u(x)=x.$$

مثال۲: معادله انتگرال فردهولم زير را با روش مستقيم حل كنيد

$$u(x)=-8x-6x^2+\int_0^1(20xt^2+12x^2t)u(t)dt \qquad (۱-۳۷)$$

حل: هسته معادله (۱-۳۷) جدايي پذير بوده و شامل دو جمله مي باشد. آن معادله را به صورت زير مي توان نوشت

$$u(x)=-8x-6x^2+20x\int_0^1 t^2u(t)dt+12x^2\int_0^1 tu(t)dt \qquad (۱-۳۸)$$

مقادير ثابت α و β را به زير تعريف مي كنيم:

$$\alpha=\int_0^1 t^2u(t)dt \quad ، \quad \beta=\int_0^1 tu(t)dt \qquad (۱-۳۹)$$

در نتيجه معادله (۱-۳۸) را مي توان به صورت زير نوشت

$$u(x)=-8x-6x^2+20x\alpha+12x^2\beta$$

$$u(x)=(20\alpha-8)x+(12\beta-6)x^2 \qquad (۱-۴۰)$$

با جايگذاري رابطه (۱-۴۰) در معادلات (۱-۳۹) بدست مي آوريم:

$$\alpha=\int_0^1[(20\alpha-8)t+(12\beta-6)t^2]t^2dt, \qquad (۱-۴۱)$$

$$\beta=\int_0^1[(20\alpha-8)t+(12\beta-6)t^2]tdt. \qquad (۱-۴۲)$$

با انتگرالگيري از طرفهاي راست معادلات (۱-۴۱) و (۱-۴۲) دستگاه معادلات زير حاصل مي شود.

$$\begin{cases} 5\alpha+3\beta=4 \\ 40\alpha+12\beta=25 \end{cases} \qquad (۱-۴۳)$$

پس از حل دستگاه فوق مقادير α و β را بدست مي آوريم.

$$\alpha=\frac{9}{20},\beta=\frac{7}{12} \qquad (۱-۴۴)$$

با قرار دادن مقادير (۱-۴۴) در عبارت (۱-۴۰) جواب معادله انتگرال (۱-۳۷) بدست مي آوريم:

$$u(x)=x^2+x.$$

۱-۲-۶ روش تقريبات متوالي در حل معادلات انتگرال فردهولم نوع دوم:

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۴۵)$$

براي حل معادله فوق از يك مقدار آغازي مثلا $u_0(x)$ كه معمولا برابر است با: 0 و 1 و x شروع مي كنيم.
با قرار دادن اين مقدار $u_0(x)$ در معادله (۱-۴۵) داريم

$$u_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u_0(x)dt$$

در مرحله دوم $u_1(x)$ را در معادله انتگرال قرار ميدهيم و $u_2(x)$ را محاسبه مي كنيم و اين روند را ادامه مي دهيم

$$u_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)u_1(t)dt$$
$$\vdots$$
$$u_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)u_{n-1}(t)dt$$

نهايتا يك رشته ازتوابع مانند: $\{u_k(x)\}_0^\infty$ بدست مي آيند كه در صورت همگرا بودن به تابع $u(x)$,آن جواب معادله (۱ـ٤٥) خواهد بود.

مثال۱: معادله انتگرال زير را با روش تقريبات متوالي حل كنيد

$$u(x) = x + \lambda\int_0^1 xt.u(t)dt\,.$$

مقدار آغازي را انتخاب مي كنيم:

$$u_0(x) = 0$$
$$u_1(x) = x$$
$$u_2(x) = x + \lambda\int_0^1 xt^2dt = x + \frac{\lambda x}{3} = (1+\frac{\lambda}{3})x$$
$$u_3(x) = x + \lambda\int_0^1 xt^2(1+\frac{\lambda}{3})dt = x + x(\frac{\lambda}{3}+\frac{\lambda^2}{9}) = x(1+\frac{\lambda}{3}+\frac{\lambda^2}{9})$$
$$u_4(x) = x(1+\frac{\lambda}{3}+\frac{\lambda^2}{9}+\frac{\lambda^3}{27})$$

به همين ترتيب نتيجه مي شود:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) = x[1+\frac{\lambda}{3}+\frac{\lambda^2}{9}+\ldots]$$

داخل كروشه يك تصاعد هندسي است كه شرط همگرائي آنست كه:

$$\left|\frac{\lambda}{3}\right| < 1 \Rightarrow |\lambda| < 3$$

در اين صورت تابع $u(x)$ برابر است با

$$u(x) = \frac{3x}{3-\lambda}.$$

۱ـ۲ـ۷ معادله انتگرال فردهولم همگن با هسته جداپذير

$$u(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt.$$

مثال۱: معادله انتگرال فردهولم همگن زير را حل كنيد

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\lambda\int_0^\pi \cos(x+t)u(t)dt. \qquad (۱ـ٤٦)$$

هسته معادله جداپذير است و آن برابر است با

$$k(x,t) = \cos(x+t) = \cos x\cos t - \sin x\sin t$$

بنابر این معادله (۱-۴۶) را مي توان به صورت زير نوشت

$$u(x)=\frac{2\lambda}{\pi}\int_0^1(\cos x\cos t-\sin x\sin t)u(t)dt$$

$$u(x)=\frac{2\lambda}{\pi}\cos x\int_0^1\cos tu(t)dt-\frac{2\lambda}{\pi}\sin x\int_0^1\sin tu(t)dt \qquad (۱-۴۷)$$

$$\alpha=\int_0^1\cos tu(t)dt \qquad (۱-۴۸)$$

$$\beta=\int_0^1\sin tu(t)dt \qquad (۱-۴۹)$$

با قرار دادن (۱-۴۸) و (۱-۴۹) در (۱-۴۷) داريم

$$u(x)=\frac{2\lambda}{\pi}\alpha\cos x-\frac{2\lambda}{\pi}\beta\sin x \qquad (۱-۵۰)$$

با جايگذاري معادله (۱-۵۰) در رابطه هاي (۱-۴۸) و (۱-۴۹) و حل دستگاه مقدار α و β بدست مي آيد بنابر اين

$$\alpha=\frac{2\lambda}{\pi}\int_0^1\cos t(\alpha\cos t-\beta\sin t)dt \qquad (۱-۵۱)$$

$$\beta=\frac{2\lambda}{\pi}\int_0^1\sin t(\alpha\cos t-\beta\sin t)dt \qquad (۱-۵۲)$$

$$\begin{cases}\alpha=\lambda\alpha\\ \beta=-\lambda\beta\end{cases}\qquad \alpha\neq 0,\beta\neq 0\Rightarrow\lambda=\pm 1$$

اگر $\lambda=1$,آنگاه $\begin{cases}\alpha=\alpha\\ \beta=0\end{cases}$ در اين حالت , $u(x)=\frac{2}{\pi}\alpha\cos x$.

اگر $\lambda=-1$ ،آنگاه $\begin{cases}\beta=\beta\\ \alpha=0\end{cases}$ در اين حالت، $u(x)=\frac{2}{\pi}\beta\sin x$.

مثال۲. معادله انتگرال زير را حل كنيد

$$\varphi(x)=x+\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos t+t^2\sin x+\sin t\cos x)\varphi(t)dt \qquad (۱-۵۳)$$

با استفاده از روش محاسبه مستقيم، هسته انتگرال (۱-۵۳) به سه انتگرال زير جداپذير است

$$\varphi(x)=x+\lambda\left\{x\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\varphi(t)dt}_{\alpha}+\sin x\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)dt}_{\beta}+\cos x\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\varphi(t)dt}_{\gamma}\right\} \qquad (۱-۵۴)$$

$$\varphi(x)=x+\lambda[\alpha x+\beta\sin x+\gamma\cos x] \qquad (۱-۵۵)$$

$$\varphi(t)=t+\lambda[\alpha t+\beta\sin t+\gamma\cos t] \qquad (۱-۵۶)$$

$$\begin{cases} \alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\varphi(t)dt \\ \beta = \int_{-\pi}^{\pi} t^2\varphi(t)dt \\ \gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\varphi(t)dt \end{cases} \qquad (۵۷\text{-}۱)$$

با قرار دادن (۱-۵۶) در (۱-۵۷) داریم

$$\begin{cases} \alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t[t + \lambda\alpha t + \lambda\beta \sin t + \lambda\gamma \cos t]dt \\ \beta = \int_{-\pi}^{\pi} t^2[t + \lambda\alpha t + \lambda\beta \sin t + \lambda\gamma \cos t]dt \\ \gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t[t + \lambda\alpha t + \lambda\beta \sin t + \lambda\gamma \cos t]dt \end{cases} \qquad (۵۸\text{-}۱)$$

$$\begin{cases} \alpha = (1+\lambda\alpha)\int_{-\pi}^{\pi} t\cos tdt + \lambda\beta\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\sin tdt + \lambda\gamma\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 tdt \\ \beta = (1+\lambda\alpha)\int_{-\pi}^{\pi} t^3dt + \lambda\beta\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin tdt + \lambda\gamma\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos tdt \\ \gamma = (1+\lambda\alpha)\int_{-\pi}^{\pi} t\sin tdt + \lambda\beta\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 tdt + \lambda\gamma\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\cos tdt \end{cases} \qquad (۵۹\text{-}۱)$$

از طرفي حاصل انتگرال هاي زير برابر است با:

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\cos tdt = [\cos t + t\sin t]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\sin tdt = [\sin t - t\cos t]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos tdt = [2t\cos t + (t^2-2)\sin t]_{-\pi}^{\pi} = -4\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin tdt = [2t\sin t + (2-t^2)\cos t]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\cos tdt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2tdt = -\frac{1}{4}\cos 2t]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 tdt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = [\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 tdt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = [\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

با قرار دادن حاصل انتگرال هاي فوق در (١-٥٩) مقادير γ, β, α بر حسب پارامتر λ دست مي آيند

$$\begin{cases} \alpha = \lambda\pi\gamma \\ \beta = -4\lambda\pi\gamma \qquad \Rightarrow \gamma = 2\pi + 2\lambda^2\pi^2\gamma - 4\lambda^2\pi^2\gamma \\ \gamma = 2(1+\lambda\alpha)\pi + \lambda\pi\beta \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}, \qquad \alpha = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}, \qquad \beta = \frac{-8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

با جايگذاري تساويهاي γ, β, α در (١-٥٥) تابع $\varphi(x)$ بدست مي آيد

$$\varphi(x) = x + \lambda x.\frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2} + \lambda\sin x.\frac{-8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2} + \lambda\cos x.\frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

$$\varphi(x) = x + \frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x - 4\lambda\pi\sin x + \cos x).$$

مثال٣. معادله انتگرال فردهولم نوع دوم زير را حل كنيد

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^{1} xt\varphi(t)dt \qquad (١-٦٠)$$

هسته انتگرال جداپذير است آن را مي توان به صورت نوشت

$$\varphi(x) = x + x\int_{-1}^{1} t\varphi(t)dt \qquad (١-٦١)$$

با انتخاب $\alpha = \int_{-1}^{1} t\varphi(t)dt$ داريم

$$\varphi(x) = x + x\alpha \qquad (١-٦٢)$$

با جايگذاري (١-٦٢) در (١-٦١) مقدار α و $\varphi(x)$ بدست مي آيد

$$\alpha = \frac{2}{3}(1+\alpha) \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \varphi(x) = 3x.$$

١-٢-٨ حل معادله انتگرال فردهولم نوع دوم با روش گالركينس-بوبكوف

در اين روش از پايه هاي متعامد چندجمله هاي لژاندر براي حل معادله انتگرال فردهولم نوع دوم استفاده مي شود كه پايه هاي متعامد عبارتند از:

$$B = \left\{1, x, \frac{3x^2-1}{2}, \frac{5x^3-3x}{2}, \ldots\right\}$$

مثال١. معادله انتگرال زير را با روش گالرينس حل كنيد

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^{1} xt\varphi(t)dt \qquad (١-٦٣)$$

تابع $\varphi(x)$ را با استفاده از پايه هاي متعامد در فاصله $[-1,1]$ به صورت زير مي نويسيم

$$\varphi(x) = a_1 1 + a_2 x + a_3\frac{3x-1}{2} \qquad (١-٦٤)$$

با قرار دادن (١-٦٤) در (١-٦٣) داريم

$$a_1 1 + a_2 x + a_3\frac{3x^2-1}{2} = x + x\int_{-1}^{1} t\left(a_1 1 + a_2 t + a_3\frac{3t^2-1}{2}\right)dt$$

$$a_1 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = 2x + \frac{2}{3}a_2 \qquad (۱-۶۵)$$

طرفين (۱-۶۵) را در 1 و x و $\frac{3x^2-1}{2}$ ضرب كرده و درفاصله $[-1,1]$ انتگرال مي گيريم . بدليل تعامد انتگرال جمله هاي غير متشابه صفر مي شوند پس از ساده كردن داريم:

$$\begin{cases} 2a_1 = 0 \\ \frac{2}{3}a_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}a_2 \\ \frac{2}{5}a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 3 \Rightarrow \varphi(x) = 3x. \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

مثال۲. معادله انتگرال زير را با استفاده از روش گالركينس-بوبكوف حل كنيد

$$\varphi(x) = 1 - x(e^x - e^{-x}) + \int_{-1}^{1} x^2 e^{xt}\varphi(t)dt \qquad (۱-۶۶)$$

با انتخاب سه جمله از تابع نمائي معادله (۱-۶۶) را حل مي كنيم

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{xt} = 1 + xt + \frac{x^2t^2}{2!} + \frac{x^3t^3}{3!} + \ldots$$

$$\varphi(x) = 1 - x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots\right) + \int_{-1}^{1} x^2\left(1 + xt + \frac{x^2t^2}{2!} + \ldots\right)\varphi(t)dt$$

$$\varphi(x) = 1 - 2x^2 + x^2\int_{-1}^{1}\left(1 + xt + \frac{x^2t^2}{2!} + \ldots\right)\varphi(t)dt$$

با استفاده از پايه هاي متعامد چندجمله اي لژاندر داريم

$$\varphi(x) = a_1 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2}$$

$$a_1 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = 1 - 2x^2 + x^2\int_{-1}^{1}\left(1 + xt + \frac{x^2t^2}{2!} + \ldots\right)\left[a_1 1 + a_2 t + a_3\frac{3t^2-1}{2}\right]dt$$

چون طرف اول تساوي حداكثر از درجه دو است بايد طرف دوم نيز از درجه دو باشد. بنابراين

$$a_1 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = 1 - 2x^2 + x^2\int_{-1}^{1}\left[a_1 1 + a_2 t + a_3\frac{3t^2-1}{2}\right]dt \qquad (۱-۶۷)$$

$$a_1 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = 1 - 2x^2 + 2a_1 x^2$$

$$(a_1 - \frac{a_3}{2}) + a_2 x + \frac{3}{2}a_3 x^2 = 1 + (2a_2 - 2)x^2 \qquad (۱-۶۸)$$

با مساوي قرار دادن ضرايب طرفين (۱-۶۸) داريم

$$\begin{cases} a_1 - \dfrac{a_3}{2} = 1 \\ a_2 = 0 \\ \dfrac{3}{2}a_3 = 2a_1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 1. \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

۱ـ۲ـ۹ روش ادوميان اصلاح شده براي حل معادلات انتگرال فردهولم يا ولترا

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۶۹)$$

در اين روش كه نوعي بهبود دادن به روش تجزيه مي باشد تابع f را به دو قسمت به صورت زير تقسيم مي كنيم:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad (۱-۷۰)$$

بايد توجه كرد كه يك شرط لازم براي اعمال اين روش مورد نياز است و آن اينكه $f(x)$ را بتوان به صورت لااقل دو جمله نظير رابطه (۱ـ۷۰) نشان داد.

با توجه به رابطه (۱ـ۷۰) معادله انتگرال (۱ـ۶۹) را مي توانيم به صورت زير بنويسيم

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)dt \qquad (۱-۷۱)$$

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots = f_1(x) + f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\left(u_0(t) + u_1(t) + \ldots\right)dt \qquad (۱-۷۲)$$

روش تجزيه اصلاح شده ادوميان به صورت زير بكار گرفته مي شود

$$u_0(x) = f_1(x),$$

$$u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u_0(t)dt,$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u_1(t)dt,$$

$$u_3(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u_2(t)dt,$$

$$\vdots$$

جهت تعيين مولفه هاي $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots$ از $u(x)$ جواب معادله انتگرال (۱ـ۶۹) را مي توان به شكل يك رابطه بازگشتي به صورت زير به كار برد.

$$u_0(x) = f_1(x) \qquad (۱-۷۳)$$

$$u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u_0(t)dt \qquad (۱-۷۴)$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u_n(x)dt \qquad (۱-۷۵)$$

روش تجزيه اصلاح شده را مي توان با مثال هاي زير بهتر درك نمود.

مثال۱. معادله انتگرال فردهولم زير را در نظر بگيريد.

$$u(x) = e^{3x} - \frac{1}{9}(2e^3 + 1)x + \int_0^1 xtu(t)dt. \qquad (۱-۷۶)$$

حل: براي اعمال روش تجزيه اصلاح شده $f(x)$ را به صورت زير تقسيم مي كنيم

$$f_1(x) = e^{3x} \qquad (۱-۷۷)$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{9}(2e^3+1)x \qquad (۱-۷۸)$$

اكنون قرار مي دهيم:

$$u_0(x) = e^{3x}$$

$$u_1(x) = -\frac{1}{9}(2e^3+1)x + \int_0^1 xtu_0(t)dt = -\frac{1}{9}(2e^3+1)x + x\int_0^1 te^{3t}dt = 0 \qquad (۱-۷۹)$$

با توجه به رابطه (۱-۷۹) نتيجه مي گيريم براي $n \geq 1$ ، $u_n(x) = 0$.

لذا جواب واقعي زير بدست مي آيد

$$u(x) = e^{3x}.$$

مثال۲. معادله انتگرال فردهولم زير را حل كنيد

$$u(x) = \sin^{-1}(x) + \left(\frac{\pi}{2}-1\right)x - \int_0^1 xu(t)dt. \qquad (۱-۸۰)$$

با به كار بردن روش تجزيه اصلاح شده , تابع $f(x)$ را به صورت زير تقسيم مي كنيم:

$$f_1(x) = \sin^{-1}(x) \qquad , \qquad f_2(x) = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)x \qquad (۱-۸۱)$$

لذا قرار مي دهيم:

$$u_0(x) = \sin^{-1}(x)$$

$$u_1(x) = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)x - \int_0^1 x\sin^{-1} t dt = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)x - x\left[t\sin^{-1} t + \sqrt{1-t^2} + c\right]_0^1$$

$$u_1(x) = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)x - \left(\frac{\pi}{2}-1\right)x = 0$$

در نتيجه براي $n \geq 1$ ، $u_n(x) = 0$. پس جواب واقعي به صورت زير است

$$u(x) = \sin^{-1}(x).$$

مثال۳. معادله انتگرال ولتراي نوع دوم زير را با روش تجزيه ادوميان اصلاح شده حل كنيد

$$u(x) = \cos x + (1-e^{\sin x})x + x\int_0^x e^{\sin t}u(t)dt \qquad (۱-۸۲)$$

با استفاده از روش تجزيه ادوميان اصلاح شده داري:

$$u_0(x) = f_1(x) = \cos x$$

$$u_1(x) = (1-e^{\sin x})x + x\int_0^x e^{\sin t}\cos t dt \qquad (۱-۸۳)$$

با به كار بردن روش جز به جز در انتگرال (۱-۸۳) به صورت زير بدست مي آيد

$$u_1(x) = (1-e^{\sin x})x + [xe^{\sin t}]_0^x = 0 \qquad (۱-۸٤)$$

بنابراين براي $n \geq 1$ ، $u_n(x) = 0$. پس جواب واقعي عبارت است از:

$$u(x) = u_0(x) = \cos x.$$

مثال٤. با استفاده از روش تجزيه ادوميان اصلاح شده معادله انتگرال ولتراي زير را حل كنيد

$$u(x) = 6x - x^3 + \frac{1}{2}\int_0^x tu(t)dt \qquad (۱-۸٤)$$

حل:

$$u_0(x) = 6x \Rightarrow u_0(t) = 6t$$

$$u_1(x) = -x^3 + \frac{1}{2}\int_0^x tu_0(t)dt = -x^3 + \frac{1}{2}[2t^3]_0^x = 0$$

لذا براي $n \geq 1$، $u_n(x) = 0$. پس جواب معادله انتگرال (۱-۸٤) به صورت زير است

$$u(x) = u_0(x) = 6x.$$

۱-۲-۱۰ حل معادله انتگرال ولتراي نوع دوم با استفاده از روش سريها

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۸٥)$$

فرض كنيم $u(x)$ داراي بسط مكلورن به صورت زير باشد

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (۱-۸٦)$$

با قرار دادن (۱-۸٦) در (۱-۸٥) و نوشتن بسط توابع $f(x)$ و $K(x,t)$ (در صورت لزوم) داريم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt.$$

مثال۱. معادله انتگرال ولتراي زير را با استفاده از روش سريها حل كنيد

$$u(x) = 1 + \int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (۱-۸۷)$$

با قرار دادن $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در معادله انتگرال (۱-۸۷) داريم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 1 + \int_0^x (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 1 + x\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n [\frac{t^{n+1}}{n+1}]_0^x - \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\frac{t^{n+2}}{n+2}]_0^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n + \ldots \equiv 1 + \frac{a_0}{1.2}x^2 + \frac{a_1}{2.3}x^3 + \ldots$$

$$\left| \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \;, \\ a_2 = \frac{1}{2!} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} a_3 = 0 \\ a_4 = \frac{1}{4!} \\ a_5 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{2n} = \frac{1}{(2n)!}, n = 0,1,2,3,\ldots \\ a_{2n+1} = 0 \end{array} \right.$$

بنابراين جواب معادله انتگرال برابر است با:

$$u(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cosh x.$$

۱-۲-۱۱ تبديل معادلات انتگرال ولتراي نوع دوم به يك مساله مقدار اوليه

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۸۸)$$

براي به كار بردن اين روش, از طرفين رابطه (۱-۸۸) مشتق مي گيريم البته براي مشتق گرفتن از انتگرال در طرف راست رابطه (۱-۸۸) قاعده ليب نيتز را به كار مي بريم. روند انتگرالگيري بايد پي در پي انجام شود تا زماني كه علامت انتگرال از بين برود و معادله انتگرال به يك معادله ديفرانسيل شود. به اين نكته مهم بايد توجه كرد كه شرايط اوليه بايد در در هر گام مشتق گيري با قرار دادن $x = 0$ در $u(x)$ و در مشتقهاي حاصل از آن تعيين شوند سپس مساله مقدار اوليه حاصل را با تكنيك هاي متداول در معادلات ديفرانسيل معمولي حل مي كنيم.

مثال۱. معادله انتگراي ولتراي زير را با تبديل آن به يك مساله مقدار اوليه حل كنيد.

$$u(x) = x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (t-x)u(t)dt \qquad (۱-۸۹)$$

حل: با مشتق گرفتن از طرفين رابطه (۱-۸۹) نسبت به x و استفاده از قاعده لايب نيتز داريم:

$$u'(x) = 2x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{d}{dx}\int_0^x (t-x)u(t)dt$$

$$u'(x) = 2x + \frac{1}{3}x^3 - \int_0^x u(t)dt, \qquad u'(0) = 0 \qquad (۱-۹۰)$$

از طرفين رابطه (۱-۹۰) باز هم نسبت به x مشتق مي گيريم

$$u''(x) = 2 + x^2 - u(x)$$

بنابراين معادله ديفرانسيل با مقدار اوليه زير بدست مي آيد

$$u''(x) + u(x) = x^2 + 2, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \qquad (۱-۹۱)$$

ابتدا جواب عمومي معادله ديفرانسيل همگن زير بدست مي آوريم

$$u''(x) + u(x) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$u_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \qquad (۱-۹۲)$$

سپس جواب خاص معادله (۱-۹۱) را پيدا مي كنيم

$$u''(x) + u(x) = x^2 + 2 \Rightarrow u_2(x) = \frac{1}{1+D^2}(x^2+2) = (1 - D^2 + D^4 - \ldots)(x^2+2)$$

$$u_2(x) = [(x^2+2) - 2] = x^2$$

بنابراين جواب كلي معادله ديفرانسيل (۱-۹۱) به صورت زير مي باشد

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 \qquad (۱-۹۳)$$

با اعمال مقادير اوليه در رابطه (۱-۹۳) داريم

$$\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ u'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x) = x^2.$$

مثال۲. معادله انتگرال- ديفرانسيل فردهولم زير را با روش مستقيم حل كنيد

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + x\int_0^1 tu(t)dt, \qquad u(0) = 0 \qquad (۱-۹۴)$$

حل: قرار میدهیم:

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt \qquad (۱-۹۵)$$

پس از قرار دادن (۱-۹۵) در (۱-۹۴) از طرفین آن نسبت به x از 0 تا x انتگرال مي گيريم

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + x\alpha$$

$$\int_0^x u'(x)dx = \int_0^x (1 - \frac{1}{3}x + x\alpha)dx$$

$$u(x) - u(0) = x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2}\alpha + c \Rightarrow u(x) = x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2}\alpha + c$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\begin{cases} u(x) = x + (\alpha - \frac{1}{3})\frac{x^2}{2} \\ \int_0^1 tu(t)dt = \alpha \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 t\left[t + (\alpha - \frac{1}{3})\frac{t^2}{2}\right]dt = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$$u(x) = x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{6} = x.$$

مثال۳. معادله انتگرال- ديفرانسيل فردهولم زير را با تبديل آن به يك معادله انتگرال فردهولم حل كنيد

$$u''(x) = e^x - x + x\int_0^1 tu(t)dt, \qquad u(0) = u'(0) = 1 \qquad (۱-۹۶)$$

حل:با انتخاب $\alpha = \int_0^1 tu(t)dt$ و دوبار انتگرال گيري از طرفين (۱-۹۶) نسبت به x در فاصله 0 تا x و استفاده از شرايط اوليه داده شده داريم:

$$u'(x) - u'(0) = e^x - 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\alpha$$

$$u'(x) = e^x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\alpha$$

$$u(x) - u(0) = e^x - 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\alpha$$

$$\begin{cases} u(x) = e^x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\alpha \\ \int_0^1 tu(t)dt = \alpha \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 t\left[e^t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^3}{6}\alpha\right]dt = \alpha$$

$$\int_0^1 \left(te^t - \frac{t^4}{6} + \frac{t^4}{6}\alpha\right)dt = \alpha$$

$$\left[e^t(t-1) - \frac{t^5}{30} + \frac{t^5}{30}\alpha\right]_0^1 = \alpha \Rightarrow \alpha = 1$$

$$u(x) = e^x.$$

معادلات انتگرال- ديفرانسيل ولترا با هسته جداپذير

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \le k \le (n-1) \qquad (۱-۹۷)$$

در ضمن b_k ها ثابت هايي هستند كه شرايط اوليه را معرفي مي كنند.

چون هسته معادله انتگرال جداپذير فرض شده است, داريم

$$K(x,t) = g(x)h(t) \quad \text{يا} \quad K(x,t) = \sum_k g_k(x)h_k(t) \qquad (۱-۹۸)$$

با جايگذاري عبارت (۱-۹۸) در معادله (۱-۹۷) خواهيم داشت:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x)\int_0^x h(t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \le k \le (n-1) \qquad (۱-۹۹)$$

براي حل معادله انتگرال (۱-۹۹) از روش سري استفاده مي كنيم

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (۱-۱۰۰)$$

كه در آن ضرائب ثابت a_k ها از رابطه زير بدست مي آيند

$$a_k = \frac{u^{(k)}(0)}{k!}$$

با جايگذاري عبارت (۱-۱۰۰) در معادله (۱-۹۹) داريم

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^{(n)} = f(x) + g(x)\int_0^x h(t)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)dt.$$

مثال ۱. معادله انتگرال- ديفرانسيل ولترا زير را با به كار بردن روش سري حل كنيد

$$u''(x) = x\cosh x - \int_0^x t h(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \qquad (۱-۱۰۱)$$

حل: به جاي $u(x)$ سري

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

را در دو طرف معادله (۱-۱۰۱) قرا ميدهيم. اكنون با استفاده از بسط تيلور تابع $\cosh x$ داريم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = x\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) - \int_0^x t\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt \qquad (۱-۱۰۲)$$

با استفاده از شرائط اوليه :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

و با محاسبه انتگرالهاي جملات به شكل $t^n(n \ge 0)$ خواهيم داشت

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \ldots = x\left(1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots\right) - \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}a_2x^4 + \ldots\right)$$

از تساوي ضرائب توانهاي يكسان x در دو طرف بدست مي آوريم

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3!,}, \quad a_4 = 0,$$

و به طور كلي مي توان نوشت:

$$\begin{cases} a_{2n} = 0, \\ a_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)!}, \end{cases} n = 0,1,2,3,\ldots$$

بنابراين جواب معادله (۱-۱۰۱) به صورت زير خواهد بود

$$u(x)=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+\ldots=\sinh x.$$

مثال۲. معادله انتگرال- ديفرانسيل ولترا زير را به يك مساله مقدار مرزي تبديل كنيد

$$u'(x)=1+\sin x+\int_0^x u(t)dt,\quad u(0)=-1,\quad u'(0)=1 \qquad (۱-۱۰۳)$$

حل: از طرفين رابطه (۱-۱۰۳) نسبت به x مشتق مي گيريم

$$u''(x)=\cos x+u(x)$$
$$u''(x)-u(x)=\cos x \qquad (۱-۱۰٤)$$

ابتدا معادله ديفرانسيل همگن زير را حل مي كنيم

$$u''(x)-u(x)=0\Rightarrow \lambda^2-1=0\Rightarrow \lambda=\pm 1$$
$$u_1(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

سپس جواب ويژه معادله را بدست مي آوريم

$$u''(x)-u(x)=\cos x\Rightarrow (D^2-1)u(x)=\cos x$$
$$u_2(x)=\frac{1}{D^2-1}\cos x=\frac{1}{-1^2-1}\cos x=-\frac{1}{2}\cos x$$

بنابراين جواب كلي به صورت زير خواهد بود

$$u(x)=u_1(x)+u_2(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x$$

با استفاده از مقادير اوليه ثابتهاي c_1 و c_2 بدست مي آيند

$$\begin{cases}u(0)=-1\\ u'(0)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1+c_2-\frac{1}{2}=-1\\ c_1-c_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=\frac{1}{4}\\ c_2=-\frac{3}{4}\end{cases}$$

لذا جواب معادله انتگرال (۱-۱۰۳) به صورت زير مي باشد

$$u(x)=\frac{1}{4}e^x-\frac{3}{4}e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x.$$

روش تجزيه براي حل معادلات انتگرال- ديفرانسيل ولتراي نوع دوم

$$u^{(n)}(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt,\quad u^{(k)}(0)=b_k,\quad 0\le k\le n-1 \qquad (۱-۱۰۵)$$

كه در آن $u^{(n)}(x)$ نشان دهنده مشتق مرتبه n ام نسبت به x است و b_k ها ثابتهاي هستند كه توسط شرايط اوليه مشخص مي شوند. طبيعي است كه در جستجوي عبارتي براي $u(x)$ باشيم كه از رابطه (۱-۱۰۵) بدست آيد. اين كار با انتگرالگيري از طرفين رابطه (۱-۱۰۵) در فاصله 0 تا x به تعداد مرتبه مشتق تابع مجهول در معادله موردنظر انجام مي شود. در نتيجه بدست مي آوريم:

$$u(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k+L^{-1}\big(f(x)\big)+L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u(t)dt\right) \qquad (۱-۱۰٦)$$

كه درآن $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k$ از شرائط اوليه بدست مي آيد و L^{-1} يك عملگر انتگرالگيري nگانه است.

اكنون روش تجزيه ادوميان را با نمايش جواب معادله (۱-۱۰٦) يعني $u(x)$ را به صورت سري زير به كار مي بريم

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x) \qquad (۱۰۷-۱)$$

با جايگذاري عبارت (۱-۱۰۷) در دو طرف معادله (۱-۱۰۶) داريم

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k+L^{-1}\left(f(x)\right)+L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)dt\right) \qquad (۱۰۸-۱)$$

و اين برابر است با:

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k+L^{-1}\left(f(x)\right)$$
$$+L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt\right)$$
$$+L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_1(t)dt\right)$$
$$+\ldots$$

مولفه هاي $u_0(x),u_1(x),u_2(x),u_3(x)$ و ... از تابع مجهول $u(x)$ را مي توان به صورت رابطه بازگشتي زير نوشت.

$$u_0(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k+L^{-1}\left(f(x)\right) \qquad (۱۰۹-۱)$$

$$u_{n+1}(x)=L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_n(t)dt\right),\quad n\ge 0 \qquad (۱۱۰-۱)$$

مثال۱. معادله انتگرال-ديفرانسيل ولتراي زير را با استفاده از روش تجزيه حل كنيد.

$$u''(x)=x+\int_0^x (x-t)u(t)dt,\quad u(0)=0,\quad u'(0)=1 \qquad (۱۱۱-۱)$$

حل: با اعمال عملگر انتگرالگيري L^{-1} كه

$$L^{-1}(.)=\int_0^x\int_0^x (.)dxdx$$

روي دو طرف معادله (۱-۱۱۱) يعني با انتگرالگيري از طرفين معادله (۱-۱۱۱) در فاصله 0 تا x دو بار و استفاده از شرايط اوليه داده شده رابطه زير را بدست مي آوريم:

$$u(x)=x+\frac{1}{3!}x^3+L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u(t)dt\right)$$

همچنين با استفاده از روش تجزيه وروابط بازگشتي خواهيم داشت

$$u_0(x)=x+\frac{1}{3!}x^3,$$

$$u_1(x)=L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_0(t)dt\right)=\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7$$

$$u_2(x)=L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_1(t)dt\right)=\frac{1}{9!}x^9+\frac{1}{11!}x^{11}$$

با تركيب نتايج بالا جواب $u(x)$ به شكل يك سري به صورت زير مشخص مي شود.

$$u(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{11!}x^{11} + \ldots$$
$$u(x) = \sinh x.$$

مثال۲. معادله انتگرال-ديفرانسيل ولتراي زير را با به كار بردن روش تجزيه حل كنيد.

$$u'''(x) = -1 + \int_0^x u(t)dt, \quad u(0) = u'(0) = 1, \quad u''(0) = -1 \qquad (۱-۱۱۲)$$

حل: توجه مي كنيم كه در معادله انتگرال- ديفرانسيل بالا عملگر مشتق از مرتبه سوم است. لذا از طرفين معادله (۱-۱۱۲) در فاصله 0 تا x سه بار انتگرال مي گيريم و با به كار بردن شرايط اوليه خواهيم داشت:

$$u(x) = 1 + x - \frac{1}{21}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + L^{-1}\left(\int_0^x u(t)dt\right)$$

با اعمال روش تجزيه بدست مي آوريم:

$$u_0(x) = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3$$
$$u_1(x) = L^{-1}\left(\int_0^x u_0(x)dt\right) = \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7$$

در نتيجه جواب $u(x)$ به شكل سري به صورت زير مشخص مي شود

$$u(x) = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots \qquad (۱-۱۱۳)$$

بنابراين سري (۱-۱۱۳) را مي توان به صورت زير دسته بندي كرد.

$$u(x) = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots\right) + \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots\right)$$
$$u(x) = \cos x + \sin x.$$

فصل۲ معادلات انتگرال منفرد

۲ـ۱ تعريف

يك معادله انتگرال را معادله انتگرال منفرد گويند اگر حداقل يكي از حدود انتگرال بي نهايت باشد يا اينكه هسته $K(x,t)$ معادله در يك نقطه يا در نقاطي از فاصله انتگرالگيري نامتناهي باشد. به عبارت ديگر معادله انتگرال نوع اول:

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K)x,t)u(t)dt, \qquad (۲-۱)$$

يا معادله انتگرال نوع دوم:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \qquad (۲-۲)$$

را منفرد گويند اگر حد پائين $\alpha(x)$، حد بالاي $\beta(x)$ يا هر دو حدود انتگرالگيري بي نهايت و يا هسته $K(x,t)$ در يك نقطه يا نقاطي از فاصله انتگرالگيري نامتناهي باشد. در زير مثالهايي از معادلات انتگرال منفرد آورده مي شود.

$$u(x) = 1 + e^{-x} - \int_0^{\infty} u(t)dt\,, \quad F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}u(x)dx$$

۲-۲ مساله آبل

آبل در سال ۱۸۲۳ حرکت يك ذره را كه به سمت پائين در طول يك منحني هموار نامعلوم, در يك صفحه قائم, تحت تاثير نيروي جاذبه لغزيده مي شد, را مطالعه كرد. فرض مي شود كه ذره از حالت سكون در نقطه نظير p ارتفاع x, در طول منحني مجهول به سمت پائين ترين نقطه روي منحني نظير نقطه o كه فاصله عمودي آن صفر فرض مي شود, لغزيده مي شود. كل زمان T زمان نزول از مرتفع ترين نقطه به پائين ترين نقطه روي منحني يعني T از قبل معلوم است و به ارتفاع x بستگي دارد و آن را به صورت زير نشان مي دهيم.

$$T = h(x)$$

فرض مي كنيم كه منحني حركت بين نقاط p و o طول برابر s داشته باشد لذا سرعت در يك نقطه نظير Q روي منحني بين P و O بوسيله رابطه زير مشخص مي شود.

$$\frac{ds}{dT} = -\sqrt{2g(x-t)}$$

$$dT = -\frac{ds}{\sqrt{2g(x-t)}} \qquad (۲\text{-}۳)$$

با انتگرال گيري از دو طرف (۲-۳) خواهيم داشت:

$$T = -\int_O^P \frac{ds}{\sqrt{2g(x-t)}} \qquad (۲\text{-}۴)$$

قرار مي دهيم:

$$s = u(t) \Rightarrow ds = u(t)dt$$

معادله (۲-۴) به صورت زير بدست مي آيد

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_O^P \frac{u(t)dt}{\sqrt{x-t}}$$

$$\sqrt{2g}h(x) = \int_{O=0}^{P=x} \frac{u(t)dt}{\sqrt{x-t}}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)dt}{\sqrt{x-t}} \qquad (۲\text{-}۵)$$

معادله انتگرال منفرد (۲-۵) را معادله انتگرال آبل گويند.

مساله۱. معادله انتگرال آبل را حل كنيد

تبديل لاپلاس را براي تعيين يك فرمول مناسب براي حل مساله آبل به كار مي بريم

$$L\{f(x)\} = L\left\{\int_0^x \frac{u(t)dt}{\sqrt{x-t}}\right\} = L\left\{\int_0^x (x-t)^{-1/2}u(t)dt\right\} \qquad (۲\text{-}۶)$$

با توجه به تبديل لاپلاس كانولوشن كه

$$L\{h(x)*g(x)\} = L\left\{\int_0^x h(x-t)g(t)dt\right\} = L\{h(x)\}L\{g(x)\}.$$

مي توان رابطه (۲-۶)را به صورت زير نوشت

$$L\{f(x)\} = L\left\{\frac{1}{\sqrt{x}} * u(x)\right\} = L\{x^{-1/2}\}L\{u(t)\}$$

$$L\{u(x)\} = \frac{L\{f(x)\}}{L\{x^{-1/2}\}} = \frac{L\{f(x)\}}{\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} L\{f(x)\}$$

$$L\{u(x)\} = \frac{s}{\pi}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{s}}L\{f(x)\}\right\} \qquad (۲\text{-}۷)$$

قرار مي دهيم:

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} f(t)dt$$

$$L\{g(x)\} = L\{x^{-1/2} * f(x)\} = L\{x^{-1/2}\}L\{f(x)\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}L\{f(x)\} \qquad (۲\text{-}۸)$$

با جايگذاري (۲-۸) در رابطه (۲-۷) داريم:

$$L\{u(x)\} = \frac{s}{\pi}L\{g(x)\} = \frac{1}{\pi}L\{g'(x)\} \qquad (۲\text{-}۹)$$

از طرفين رابطه (۲-۹) معكوس تبديل لاپلاس مي گيريم:

$$u(x) = \frac{1}{\pi}g'(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{f(t)dt}{\sqrt{x-t}}\right). \qquad (۲\text{-}۱۰)$$

مثال۱. با فرض $f(x) = 2\sqrt{x}$ معادله انتگرال منفرد آبل را حل كنيد.

$$\int_0^x \frac{u(t)dt}{\sqrt{x-t}} = 2\sqrt{x} \qquad (۲\text{-}۱۱)$$

براي حل معادله انتگرال آبل (۲-۱۱) از فرمول (۲-۱۰) خواهيم داشت:

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{2\sqrt{t}dt}{\sqrt{x-t}} \qquad (۲\text{-}۱۲)$$

با تغيير متغير $t = x\sin^2\theta$ و $dt = 2x\sin\theta\cos\theta d\theta$ حدود انتگرالگيري در (۲-۱۲) از 0 تا x به 0 تا $\frac{\pi}{2}$ تغيير مي يابد

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^{\pi/2} \frac{(2\sqrt{x}\sin\theta)(2x\sin\theta\cos\theta)d\theta}{\sqrt{x}\cos\theta}$$

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left[4x\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta\right]$$

$$u(x) = \frac{4}{\pi}.\frac{\pi}{4} = 1.$$

مثال۲. معادله انتگرال منفرد آبل را براي $f(x) = \pi$ حل كنيد.

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\pi dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}} \qquad (۲\text{-}۱۳)$$

با تغيير متغير $x - t = w$ داريم

$$u(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dw}{\sqrt{w}} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

۲ـ۳ معادله انتگرال تعميم يافته آبل

معادله انتگرال منفرد كلي تر زير به معادله انتگرال تعميم يافته آبل مشهور است.

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (۲\text{-}۱۴)$$

معادله انتگرال تعمیم یافته آبل درحالت خاص $\alpha=\frac{1}{2}$ به معادله انتگرال آبل ساده تبدیل مي شود. براي تعیین فرمول عملي براي جواب $u(x)$ از معادله انتگرال (٢-١٤) از طرفین آن تبدیل لاپلاس مي گیریم

$$L\{f(x)\}=L\left(\int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}\right)=L\left(\int_0^x (x-t)^{-\alpha}u(t)dt\right) \qquad (٢-١٥)$$

با توجه به تبدیل لاپلاس تابع کانولوشن , رابطه (٢-١٥) را مي توان به صورت زیر نوشت

$$L\{f(x)\}=L\{x^{-\alpha}*u(x)\}=L\{x^{-\alpha}\}L\{u(x)\}$$

$$L\{f(x)\}=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}L\{u(x)\}$$

$$L\{u(x)\}=\frac{s^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}L\{f(x)\}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}.s\{s^{-\alpha}L\{f(x)\}\}$$

$$L\{u(x)\}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}.s\left\{\frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}L\{f(x)\}\right\} \qquad (٢-١٦)$$

فرض کنیم:

$$g(x)=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}f(t)dt$$

$$L\{g(x)\}=\frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}L\{f(x)\} \qquad (٢-١٧)$$

با قرار دادن (٢-١٧) در(٢-١٦) خواهیم داشت:

$$L\{u(x)\}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}sL\{g(x)\}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}L\{g'(x)\}$$

با استفاده از رابطه $\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$ در تابع گاما رابطه فوق به حالت زیر در مي آید

$$L\{u(x)\}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}L\{g'(x)\} \qquad (٢-١٨)$$

از طرفین رابطه (٢-١٨) معکوس تبدیل لاپلاس مي گیریم

$$u(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}g'(x)$$

$$u(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}f(t)dt\right) \qquad (٢-١٩)$$

انتگرال داخل پرانتز در (٢-١٩) را با روش جزبه جز ساده مي کنیم

$$I=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}f(t)dt=-\frac{1}{\alpha}(x-t)^{\alpha}f(t)\Big|_0^x+\int_0^x \frac{1}{\alpha}(x-t)^{\alpha}f'(t)dt$$

$$=\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}f(0)+\frac{1}{\alpha}\int_0^x (x-t)^{\alpha}f'(t)dt$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^x (x-t)^{\alpha}f'(t)dt \qquad (٢-٢٠)$$

پس از جایگذاري رابطه (٢-٢٠) در (٢-١٩) و با استفاده از مشتقگیري قاعده لایب نیتز خواهیم داشت

$$u(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x (x-t)^{\alpha} f'(t)dt\right)$$
$$u(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\left(\int_0^x \alpha(x-t)^{\alpha-1} f'(t)dt\right)$$
$$u(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f'(t)dt. \qquad (٢-٢١)$$

٢-٤ معادلات انتگرال فردهولم غير خطي نوع دوم

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u^n(t)dt \qquad (٢-٢٢)$$

٢-٤-١ روش محاسبه مستقيم

با فرض اينكه هسته معادلات انتگرال فردهولم غير خطي(٢-٢٢) قابل تجزيه باشد
با قرار دادن $K(x,t)=g(x)h(t)$ در رابطه (٢-٢٢) خواهيم داشت

$$u(x)=f(x)+\lambda g(x)\int_a^b h(t)u^n(t)dt \qquad (٢-٢٣)$$

با استفاده از روش مستقيم قرار مي دهيم:

$$\alpha=\int_a^b h(t)u^n(t)dt \qquad (٢-٢٤)$$

لذا رابطه (٢-٢٣) به صورت زير در مي آيد

$$u(x)=f(x)+\lambda\alpha g(x) \qquad (٢-٢٥)$$

با جايگذاري رابطه (٢-٢٥) در (٢-٢٤) انتگرال فوق قابل محاسبه مي شود واز آنجا مقدار α ودر نتيجه $u(x)$ بدست مي آيد.

مثال. معادله انتگرال فردهولم غير خطي زير را با روش مستقيم حل كنيد.

$$u(x)=2-\frac{4}{3}x+\int_0^1 xt^2u^2(t)dt\,.$$

حل: با قرار دادن

$$\alpha=\int_0^1 t^2u^2(t)dt \Rightarrow u(x)=2-\frac{4}{3}x+\alpha x$$

بنابراين

$$\alpha=\int_0^1 t^2\left(2-\frac{4}{3}t+t\alpha\right)^2 dt=\int_0^1\left(4t^2+4(\alpha-\frac{4}{3})t^3+(\alpha-\frac{4}{3})^2t^4\right)dt$$
$$\alpha=\frac{4}{3}+(\alpha-\frac{4}{3})+\frac{1}{5}(\alpha-\frac{4}{3})^2 \Rightarrow \alpha=\frac{4}{3}$$
$$u(x)=2.$$

٢-٤-٢ روش تجزيه آدوميان

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u^n(t)dt.$$

در اين روش قرار مي دهيم:

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x),\qquad u^n(x)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)\right)^n=F(u(x))=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)$$

كه $A_k(x)$ را چندجمله اي ادوميان مي گويند. بنابراين تابع غيرخطي $F(u(t))$ به صورت زير مشخص مي شود.

$$\begin{cases} A_0(x)=F(u_0)\\ A_1(x)=u_1F'(u_0)\\ A_2(x)=u_2F'(u_0)+\dfrac{u_1^2}{2!}F''(u_0)\\ A_3(x)=u_3F'(u_0)+u_1u_2F''(u_0)+\dfrac{u_1^3}{3!}F'''(u_0)\end{cases}\qquad (۲-۲٦)$$

بايد به اين نكته توجه كرد كه جمع انديس هاي هر جمله A_k برابر با n است.

مثال. معادله انتگرال غيرخطي فردهولم زير را در نظر مي گيريم:

$$u(x)=2+\lambda\int_0^1 u^2(t)dt,\quad \lambda\le\frac{1}{8}\qquad (۲-۲۷)$$

حل: در اين مثال داريم:

$$F(u)=u^2(x)$$

لذا چندجمله ايهاي زير را خواهيم داشت:

$$\begin{cases} A_0=u_0^2\\ A_1=2u_0u_1\\ A_2=2u_0u_2+u_1^2\\ A_3=2u_0u_3+2u_1u_2\end{cases}\qquad (۲-۲۸)$$

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)$$

با جايگذاري در(۲-۲۷) داريم:

$$u_0+u_1+u_2+\ldots=2+\lambda\int_0^1(u_0+u_1+u_2+\ldots)^2dt$$

$$u_0=2\Rightarrow A_0=u_0^2=4$$

$$u_1=\lambda\int_0^1 A_0(t)dt=\lambda\int_0^1 4dt=4\lambda\Rightarrow A_1=2u_0u_1=16\lambda$$

$$u_2=\lambda\int_0^1 A_1(t)dt=\lambda\int_0^1 16\lambda dt=16\lambda^2\Rightarrow A_2=80\lambda^2$$

$$u_3=\lambda\int_0^1 A_2(t)dt=\lambda\int_0^1 80\lambda^2dt=80\lambda^3$$

$$u_4=288\lambda^4$$

$$\vdots$$

$$u(x)=2+4\lambda+16\lambda^2+80\lambda^3+288\lambda^4+\ldots$$

۲ـ۵ معادلات انتگرال غير خطي ولتراي نوع دوم

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u^n(t)dt \qquad (۲۹\text{-}۲)$$

۲ـ۵ـ۱ روش سري

معادله انتگرال غير خطي ولتراي به شكل (۲-۲۹) كه در آن هسته $K(x,t)$ يك هسته جدايي پذير فرض مي شود را با روش سري حل مي كنيم.

براي استفاده از اين روش بايد فرض كنيم كه $u(x)$ تحليلي باشد و لذا سري تيلور آن حول $x=0$ را به صورت زير نشان مي دهيم.

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \qquad (۳۰\text{-}۲)$$

با قرار دادن عبارت (۲-۳۰) در دو طرف معادله (۲-۲۹) و با فرض $K(x,t)=g(x)h(t)$ خواهيم داشت:

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k = f(x)+\lambda g(x)\int_0^x h(t)\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\right)^n dt$$

كه به طور ساده تر مي توان نوشت:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=f(x)+\lambda g(x)\int_0^x h(t)\left(a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots\right)^n dt\,.$$

مثال. معادله انتگرال غيرخطي ولتراي زير را با روش سري حل كنيد.

$$u(x)=x-\frac{1}{4}x^4+\int tu^2(t)dt. \qquad (۳۱\text{-}۲)$$

حل: با جايگذاري $u(x)$ به شكل سري داده شده توسط رابطه (۲-۳۰) در دو طرف (۲-۳۱) نتيجه زير را بدست مي آوريم

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=x-\frac{1}{4}x^4+\int_0^x t\left[a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots\right]^2 dt \qquad (۳۲\text{-}۲)$$

با انتگرالگيري از طرف راست رابطه (۲-۳۲) بدست مي آوريم:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=x-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}a_0^2x^2+\frac{2}{3}a_0a_1x^3+\ldots$$

از مساوي قرار دادن ضرايب توانهاي مساوي x در بالا داريم:

$$a_1=1,\quad a_n=0,\quad \forall n\neq 1$$

بنابراين جواب واقعي به صورت زير خواهد بود.

$$u(x)=x.$$

۲ـ۵ـ۲ روش تجزيه

براي حل معادله انتگرال غيرخطي ولتراي (۲-۲۹) از روش تجزيه , از روابط بازگشتي زير استفاده مي شود

$$\begin{cases} u_0(x)=f(x)\\ u_1(x)=\lambda\int_0^x K(x,t)A_0(t)dt\\ u_2(x)=\lambda\int_0^x K(x,t)A_1(t)dt\\ \vdots\\ u_{n+1}(x)=\lambda\int_0^x K(x,t)A_n(t)dt,\ n\geq 0\end{cases} \qquad (۳۳\text{-}۲)$$

براي پيدا كردن چندجمله ايهاي ادوميان $A_n(x)$ از رابطه (۲-۲۸) استفاده مي شود.

مثال. معادله انتگرال غيرخطي ولتراي زير را با روش تجزيه حل كنيد.

$$u(x)=x+\frac{1}{5}x^5-\int_0^x tu^3(t)dt. \qquad (۲-۳٤)$$

حل: محاسبات را تعيين مقدار اوليه آغاز مي كنيم

$$u_0(x)=x+\frac{1}{5}x^5$$

لذا مولفه اول به صورت زير بدست مي آيد

$$u_1(x)=-\int_0^x tA_0(t)dt, \qquad A_0=u_0^3$$

$$u_1(x)=-\int_0^x t\left(t+\frac{1}{5}t^5\right)^3 dt=-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{15}x^9-\frac{3}{325}x^{13}-\frac{1}{2125}x^{17}$$

به همين ترتيب پس از محاسبه مولفه هاي ديگر $u(x)$ به صورت زير حاصل مي شود

$$u(x)=x.$$

۲-٦ معادلات انتگرال منفرد با هسته لگاريتمي

مثال: در معادله انتگرال منفرد زير تابع $g(t)$ را بدست آوريد

$$\int_{-1}^{1}\ln|x-t|g(t)dt=1 \qquad (۲-۳٥)$$

حل: تغييرمتغيري به صورت زير وارد مي كنيم:

$$x=\cos\beta,\quad t=\cos\alpha,\quad g(t)=g(\cos\alpha),\quad dt=-\sin\alpha d\alpha \qquad (۲-۳٦)$$

و حدود انتگرال از -1 تا 1 به π تا 0 تغيير مي يابد لذا رابطه (۲-۳٥) را مي توان به صورت زير نوشت:

$$-\int_{\pi}^{0}\ln|\cos\beta-\cos\alpha|g(\cos\alpha)\sin\alpha d\alpha=1$$

$$\int_0^{\pi}\ln|\cos\beta-\cos\alpha|g(\cos\alpha)\sin\alpha d\alpha=1 \qquad (۲-۳۷)$$

با انتخاب $g(\cos\alpha)\sin\alpha=G(\alpha)$ داريم:

$$\int_0^{\pi}\ln|\cos\beta-\cos\alpha|G(\alpha)d\alpha=1 \qquad (۲-۳۸)$$

بسط فوريه كسينوسي تابع $G(\alpha)$ و $\ln|\cos\beta-\cos\alpha|$ را بر حسب α مي نويسيم:

$$G(\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m\cos m\alpha, \qquad (۲-۳۹)$$

$$\ln|\cos\beta-\cos\alpha|=-\ln 2-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\cos n\alpha\cos n\beta), \qquad (۲-٤٠)$$

روابط (۲-۳۹) و (۲-٤٠) را در رابطه (۲-۳۸) قرار مي دهيم

$$\int_0^{\pi}\left[-\ln 2-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\cos n\alpha\cos n\beta)\right]\left(\sum_{m=0}^{\infty}b_m\cos m\alpha\right)d\alpha=1$$

$$-\int_0^{\pi}b_0(\ln 2)d\alpha-2\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\cos n\beta\cos^2 n\alpha d\alpha=1$$

$$-(\ln 2)b_0\pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{b_n}{n}\cos n\beta\left(\frac{1+\cos 2n\alpha}{2}\right)d\alpha = 1$$

$$-(\ln 2)b_0\pi - \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\cos\beta = 1$$

بنابراین در رابطه فوق براي $n \ge 1$ ، $b_n = 0$ ، و

$$-(\ln 2)b_0\pi = 1 \Rightarrow b_0 = -\frac{1}{\pi\ln 2}$$

در رابطه (۲-۳۹) داریم

$$G(\alpha) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos m\alpha \xrightarrow{\forall m\ge 1, b_m=0} G(\alpha) = b_0 = -\frac{1}{\pi\ln 2}$$

از طرفي $G(\alpha)$ را به صورت زیر انتخاب کرده ایم

$$g(\cos\alpha)\sin\alpha = G(\alpha) = -\frac{1}{\pi\ln 2}$$

$$g(\cos\alpha) = -\frac{1}{\pi\ln 2}.\frac{1}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\pi\ln 2}.\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \qquad (۲\text{-}۴۱)$$

لذا تابع $g(t)$ با قرار دادن t به جاي $\cos\alpha$ در (۲-۴۱) بدست مي آید.

$$g(t) = -\frac{1}{\pi\ln 2}.\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad -1 < t < 1.$$

قضیه $(EFROS)$: فرض کنید $L\{\varphi(x)\} = \Phi(s)$ و $L\{u(x,\tau)\} = U(s)\exp(-\tau q(s))$ که توابع $U(s)$ و $q(s)$ تحلیلي اند دراین صورت

$$L\left\{\int_0^{\infty}\varphi(\tau)u(x,\tau)d\tau\right\} = \Phi(q(s))U(s).$$

مثال۱. فرض کنید $U(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ و $q(s) = \sqrt{s}$ آنگاه $U(s)e^{-\tau q(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\tau\sqrt{s}}$ در این صورت

$$L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\exp(-\frac{\tau^2}{4x})\right\} = \frac{1}{\sqrt{s}}\exp(-\tau\sqrt{s}).$$

مثال۲. معادله انتگرال زیر را با استفاده از قضیه $(efros)$ حل کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty}\exp(-\frac{\tau^2}{4x})\varphi(\tau)d\tau = 1 \qquad (۲\text{-}۴۲)$$

حل: با استفاده از قضیه افراز و مثال۱ داریم:

$$L\left\{\int_0^{\infty}\varphi(\tau)u(x,\tau)d\tau\right\} = \Phi(q(s))U(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\Phi(\sqrt{s})$$

بنابراین

$$L\left\{\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\exp(-\frac{\tau^2}{4x})\varphi(\tau)d\tau\right\} = L\{1\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{s}}\Phi(\sqrt{s}) = \frac{1}{s} \qquad (۲\text{-}۴۳)$$

$$\Phi(\sqrt{s}) = \frac{1}{\sqrt{s}} \xrightarrow{\sqrt{s}\to s} \Phi(s) = \frac{1}{s} \qquad (۲\text{-}۴۴)$$

از طرفين رابطه (۲-٤٤) معكوس تبديل لاپلاس مي گيريم

$$L^{-1}\{\Phi(s)\} = L^{-1}\{\frac{1}{s}) \Rightarrow \varphi(t) = 1.$$

براي حل معادلات انتگرال با استفاده از قضيه افراز دانستن تبديل لاپلاس جدول ضميمه۱ ضروري است

مثال۳. معادله انتگرال زير را حل كنيد

$$\varphi(x) = \cos x + \lambda \int_0^\infty J_0\left(2\sqrt{xt}\right)\varphi(t)dt. \qquad (۲-٤٥)$$

حل: از طرفين رابطه (۲-٤٥) تبديل لاپلاس مي گيريم

$$L\{\varphi(x)\} = L\{\cos x\} + \lambda L\left\{\int_0^\infty J_0\left(2\sqrt{xt}\right)\varphi(t)dt\right\} \qquad (۲-٤٦)$$

با توجه به جدول ضميمه ۱ و قضيه افراز مي توان رابطه (۲-٤٦) را به صورت زيرنوشت:

$$\Phi(s) = \frac{s}{s^2+1} + \lambda \frac{1}{s}\Phi\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (۲-٤٧)$$

$$s \to \frac{1}{s} \Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{s}{s^2+1} + \lambda s\Phi(s) \qquad (۲-٤٨)$$

رابطه (۲-٤٨) را در رابطه (۲-٤٧) قرار مي دهيم

$$\Phi(s) = \frac{s}{s^2+1} + \lambda \frac{1}{s}\left\{\frac{s}{s^2+1} + \lambda s\Phi(s)\right\}$$

$$\Phi(s) = \frac{s}{s^2+1} + \lambda \frac{1}{s^2+1} + \lambda^2\Phi(s)$$

$$(1-\lambda^2)\Phi(s) = \frac{s}{s^2+1} + \lambda \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left(\frac{s}{s^2+1} + \lambda \frac{1}{s^2+1}\right) \qquad (۲-٤٩)$$

با گرفتن معكوس تبديل لاپلاس از طرفين رابطه (۲-٤٩) تابع $\varphi(x)$ بدست مي آيد

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left(\cos x + \lambda \sin x\right).$$

مثال٤. معادله انتگرال زير را حل كنيد

$$\varphi(x) = xe^{-x} + \lambda \int_0^\infty J_0\left(2\sqrt{xt}\right)\varphi(t)dt. \qquad (۲-٥٠)$$

حل: از طرفين رابطه (۲-٥٠) تبديل لاپلاس مي گيريم

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \lambda \frac{1}{s}\Phi\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (۲-٥١)$$

$$s \to \frac{1}{s} \Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{s^2}{(s+1)^2} + \lambda s\Phi(s) \qquad (۲-٥٢)$$

با جايگذاري رابطه (۲-٥٢) در رابطه (۲-٥١) داريم

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \lambda \frac{1}{s}\left\{\frac{s^2}{(s+1)^2} + \lambda s\Phi(s)\right\}$$

$$(1-\lambda^2)\Phi(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \lambda \frac{s}{(s+1)^2} \qquad (۲-٥٣)$$

از طرفين رابطه (۲-۵۳) معكوس تبديل لاپلاس مي گيريم

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left(xe^{-x}+\lambda(e^{-x}-xe^{-x}\right).$$

مثال۵. مطلوبست محاسبه انتگرال $.I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \cos\tau.\exp(-\frac{\tau^2}{4t})d\tau$

حل: با فرض

$$\varphi(\tau)=\cos\tau \Rightarrow L\{\cos\tau\}=\frac{s}{s^2+1}=\Phi(s) \qquad (۲-۵۴)$$

$$u(\tau,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{\tau^2}{4t}) \Rightarrow L\{u(\tau,t)\}=\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\tau\sqrt{s}}=U(s)e^{-\tau q(s)} \qquad (۲-۵۵)$$

از تساوي رابطه (۲-۵۵) نتيجه مي شود

$$U(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}, \qquad q(s)=\sqrt{s} \qquad (۲-۵۶)$$

حالا از طرفين انتگرال بالا تبديل لاپلاس مي گيريم

$$L\{I(t)\}=L\left\{\int_0^\infty \cos\tau.\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{\tau^2}{4t})d\tau\right\} \qquad (۲-۵۷)$$

با استفاده از قضيه افراز در طرف دوم رابطه (۲-۵۷) داريم:

$$L\{I(t)\}=U(s).\Phi\left(q(s)\right) \qquad (۲-۵۸)$$

با جايگذاري روابط (۲-۵۴) و(۲-۵۶) در طرف دوم تساوي (۲-۵۸) خواهيم داشت:

$$L\{I(t)\}=\frac{1}{\sqrt{s}}.\frac{\sqrt{s}}{s+1}=\frac{1}{s+1} \qquad (۲-۵۹)$$

با گرفتن معكوس تبديل لاپلاس از طرفين رابطه (۲-۵۹) تابع $I(t)$ بدست مي آيد

$$I(t)=e^{-t}.$$

مثال٦. انتگرال زير را حل كنيد

$$I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty(\tau\sinh\tau)\exp(-\frac{\tau^2}{4t})d\tau \qquad (۲-٦۰)$$

حل: با فرض

$$\varphi(t)=t\sinh t \Rightarrow \Phi(s)=-\left(\frac{1}{s^2-1}\right)'=\frac{2s}{(s^2-1)^2}$$

حالا با به كار بردن قضيه افراز در رابطه (۲-٦۰) خواهيم داشت:

$$L\{I(t)\}=\frac{\Phi(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}=\frac{1}{\sqrt{s}}.\frac{2\sqrt{s}}{(s-1)^2}=\frac{2}{(s-1)^2}$$

با گرفتن معكوس تبديل لاپلاس از طرفين رابطه فوق انتگرال (۲-٦۰) حاصل مي شود

$$I(t)=2te^t.$$

مثال۷. معكوس لاپلاس تابع زير را محاسبه كنيد

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}\right\}=g(t). \qquad (۲-٦۱)$$

حل: با استفاده از قضيه افراز مي دانيم كه:

$$L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \varphi(\tau)\exp(-\frac{\tau^2}{4t})d\tau\right\}=\frac{\Phi(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \qquad (۲\text{-}۶۲)$$

اگر از طرفین رابطه (۲-۶۲) معکوس تبدیل لاپلاس بگیریم، خواهیم داشت

$$L^{-1}\left\{\frac{\Phi(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \varphi(\tau)\exp(-\frac{\tau^2}{4t})d\tau \qquad (۲\text{-}۶۳)$$

بنابراين با مقايسه طرفهاي اول روابط (۲-۶۱) و (۲-۶۳) نتيجه مي شود

$$\Phi(\sqrt{s})=\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}} \Rightarrow \Phi(s)=\frac{e^{-as}}{s^2} \qquad (۲\text{-}۶۴)$$

معكوس تبديل لاپلاس رابطه (۲-۶۴) عبارت است از:

$$\varphi(t)=(t-a)H(t-a) \qquad (۲\text{-}۶۵)$$

با قرار دادن تابع (۲-۶۵) در رابطه (۲-۶۳) داريم

$$g(t)=L^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty (\tau-a)H(\tau-a)\exp(-\frac{\tau^2}{4t})d\tau$$

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty (\tau-a)\exp(-\frac{\tau^2}{4t})d\tau$$

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty \tau\exp(-\frac{\tau^2}{4t})d\tau-\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty \exp(-\frac{\tau^2}{4t})d\tau \qquad (۲\text{-}۶۶)$$

با تغييرمتغير $x=\frac{\tau}{2\sqrt{t}}$ در انتگرال دوم طرف راست رابطه (۲-۶۶) تابع $g(t)$ حاصل مي شود

$$g(t)=2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp(-\frac{a^2}{4t})-aErfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$

مثال۸. معكوس لاپلاس تابع زير را محاسبه كنيد

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s(a+\sqrt{s})}\right\}=g(t) \qquad (۲\text{-}۶۷)$$

حل: با استفاده از رابطه (۲-۶۳) داريم

$$L^{-1}\left\{\frac{\Phi(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s(a+\sqrt{s})}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(a+\sqrt{s})}\right\} \qquad (۲\text{-}۶۸)$$

از رابطه (۲-۶۸) نتيجه مي گيريم

$$\Phi(\sqrt{s})=\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(a+\sqrt{s})} \Rightarrow \Phi(s)=\frac{e^{-as}}{s(a+s)} \qquad (۲\text{-}۶۹)$$

با گرفتن معكوس تبديل لاپلاس از طرفين رابطه (۲-۶۹) تابع $\varphi(t)$ بدست مي آيد

$$\varphi(t)=\frac{1}{a}L^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}-\frac{e^{-as}}{a+s}\right\}=\frac{1}{a}\left[L^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{a+s}\right\}\right] \qquad (۲\text{-}۷۰)$$

با استفاده از معكوس تبديل لاپلاس از ضميمه ۲ در رابطه (۲-۷۰) داريم:

$$\varphi(t)=\frac{1}{a}\left\{H(t-a)-e^{-a(t-a)}H(t-a)\right\} \qquad (۲\text{-}۷۱)$$

به جاي $\varphi(t)$ در رابطه (۲-۶۳) تساوي آن را از رابطه (۲-۷۱) قرار مي دهيم

$$g(t)=L^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s(a+\sqrt{s})}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \frac{1}{a}\{H(\tau-a)-e^{-a(\tau-a)}H(\tau-a)\}\exp(-\frac{\tau^2}{4t})d\tau$$

$$g(t)=\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty \exp(-\frac{\tau^2}{4t})d\tau-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty \exp(-\frac{\tau^2}{4t}-a\tau+a^2)d\tau$$

$$g(t)=\frac{1}{a}erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty \exp\left(-(\frac{\tau}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t})+(a^2+ta^2)\right)d\tau$$

$$g(t)=\frac{1}{a}erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{1}{a}\exp\left(a^2(1+t)\right)erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right).$$

حل معادله انتگرال آبل

$$\int_0^x \varphi(t)(x-t)^\beta dt=x^\lambda,\quad \lambda>0,\beta>-1 \tag{۷۲-۲}$$

براي حل معادله انتگرال (۲-۷۲) طرفين آن را در $(z-x)^\mu$ (μ اختياري) ضرب نموده و سپس نسبت به x در فاصله $[0,z]$ انتگرال مي گيريم

$$\int_0^z (z-x)^\mu dx\int_0^x (x-t)^\beta dt=\int_0^z (z-x)^\mu x^\lambda dx \tag{۷۳-۲}$$

در انتگرال سمت راست (۲-۷۳) تغيير متغير به صورت $x=zp$ را اعمال مي كنيم

$$R.H.S=\int_0^1 (z-zp)^\mu (zp)^\lambda dp=z^{\mu+\lambda+1}\int_0^1 (1-p)^\mu p^\lambda dp$$

$$=z^{\mu+\lambda+1}B(\mu+1,\lambda+1)=z^{\mu+\lambda+1}\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+\lambda+2)} \tag{۷٤-۲}$$

تعويض ترتيب انتگرال گيري را درسمت چپ رابطه (۲-۷۲) انجام مي دهيم

$$L.H.S=\int_0^z \varphi(t)dt\int_t^z (z-x)^\mu (x-t)^\beta dx \tag{۷٥-۲}$$

حالا بر روي انتگرال (۲-۷٥) تغيير متغير به صورت $x=t+(z-t)p$ را اعمال مي كنيم

$$L.H.S=\int_0^z \varphi(t)dt\int_0^1 (z-t)^{1+\beta+\mu}(1-p)^\mu p^\beta dp$$

$$=B(\mu+1,\beta+1)\int_0^z (z-t)^{\beta+\mu+1}\varphi(t)dt$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mu+\beta+2)}\int_0^z (z-t)^{\beta+\mu+1}\varphi(t)dt \tag{۷٦-۲}$$

$$\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mu+\beta+2)}\int_0^z (z-t)^{\beta+\mu+1}\varphi(t)dt=z^{\mu+\lambda+1}\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\lambda+2)} \tag{۷۷-۲}$$

μ را طوري انتخاب مي كنيم كه $\mu+\beta+1=n$ باشد. با توجه به فرض فوق كافي است $(n+1)$ بار از طرفين رابطه (۲-۷۷) نسبت به z با استفاده از قاعده لايب نيتز مشتق بگيريم در اين صورت خواهيم داشت

$$\varphi(z)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda-\beta)}z^{\lambda-\beta-1}.$$

روش دیگر حل معادله انتگرال آبل با استفاده از تبدیل لاپلاس کانولوشن
از طرفین رابطه (۲-۷۲) تبدیل لاپلاس مي گیریم

$$L\left\{\int_0^x \varphi(t)(x-t)^{\beta}dt\right\}=L\{x^{\lambda}\}$$

$$\Phi(s)\frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}\Rightarrow\Phi(s)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)}\frac{1}{s^{\lambda-\beta}} \qquad (۲\text{-}۷۸)$$

از طرفین رابطه (۲-۷۸) معکوس تبدیل لاپلاس مي گیریم

$$\varphi(t)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\lambda-\beta}}\right\} \qquad (۲\text{-}۷۹)$$

با استفاده از رابطه $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}}\right\}=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ در عبارت (۲-۷۹) خواهیم داشت

$$\varphi(t)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)}.\frac{t^{\lambda-\beta-1}}{\Gamma(\lambda-\beta)}.$$

مثال۱. معادله انتگرال آبل زیر حل کنید

$$\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt=x^2.$$

حل: در معادله انتگرال فوق $\beta=1,\lambda=2,\lambda-\beta+k\neq 0,k=0,1,2,...$, بنابر این جواب آن به صورت زیر خواهد بود

$$\varphi(t)=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)}t^0=2.$$

مثال۲. معادله انتگرال آبل زیر را حل کنید

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt=1+x+x^2 \qquad (۲\text{-}۸۰)$$

حل: از طرفین معادله انتگرال رابطه (۲-۸۰) تبدیل لاپلاس مي گیریم

$$L\left\{\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt\right\}=L\{1+x+x^2\}$$

$$L\left\{\int_0^x (x-t)^{-1/2}\varphi(t)dt\right\}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}$$

$$L\{x^{-1/2}\}L\{\varphi(x)\}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}$$

$$\Phi(s)=\frac{s^{1/2}}{\Gamma(1/2)}\left\{\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{s^{1/2}}+\frac{1}{s^{3/2}}+\frac{2}{s^{5/2}}\right\} \qquad (۲\text{-}۸۱)$$

پس از گرفتن معکوس تبدیل لاپلاس از طرفین رابطه (۲-۸۱) خواهیم داشت

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2}+\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{3/2}\right\}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\left\{x^{-1/2}+2x^{1/2}+\frac{8}{3}x^{3/2}\right\}.$$

معادله انتگرال آبل درحالت كلي

$$f(x)=\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1 \tag{۲-۸۲}$$

با قرار دادن $x=s$ داريم:

$$f(s)=\int_0^s \frac{\varphi(t)dt}{(s-t)^{\alpha}} \tag{۲-۸۳}$$

حال طرفين رابطه (۲-۸۳) را در $\frac{ds}{(s-t)^{1-\alpha}}$ ضرب نموده و در فاصله $(0,x)$ انتگرال مي گيريم

$$\int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}=\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\int_0^s \frac{\varphi(t)dt}{(s-t)^{\alpha}} \tag{۲-۸۴}$$

با تعويض ترتيب انتگرال گيري در رابطه (۲-۸۴) داريم

$$\int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}=\int_0^x \varphi(t)dt\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} \tag{۲-۸۵}$$

با تغيير متغير $s=t+(x-t)y$ در انتگرال دوم طرف راست رابطه (۲-۸۵) خواهيم داشت

$$\int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}=\int_0^x \varphi(t)dt\int_0^1 \frac{(x-t)dy}{(x-t)^{\alpha}y^{\alpha}(x-t)^{1-\alpha}(1-y)^{1-\alpha}}$$

$$\int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}=\int_0^x \varphi(t)dt\int_0^1 y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-1}dy \tag{۲-۸۶}$$

اگر تغيير متغير $y=\frac{z}{z+1}$ را بر روي انتگرال دوم طرف راست رابطه (۲-۶۸) اعمال كنيم حاصل آن به صورت زير بدست مي آيد

$$\int_0^1 y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-1}dy=\int_0^{\infty}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \tag{۲-۸۷}$$

با جايگذاري رابطه (۲-۸۷) در (۲-۸۶) داريم

$$\int_0^x \varphi(t)dt=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \tag{۲-۸۸}$$

از طرفين رابطه (۲-۸۸) نسبت به x مشتق مي گيريم و طبق قضيه اساسي حساب ديفرانسيل داريم:

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \tag{۲-۸۹}$$

حالا با روش جز به جز در انتگرال رابطه (۲-۸۹) با انتخاب $u=f(s)$ و $dv=(x-s)^{\alpha-1}ds$ داريم:

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{d}{dx}\left\{-\frac{1}{\alpha}f(s)(x-s)^{\alpha}\Big|_0^x+\frac{1}{\alpha}\int_0^x\frac{f'(s)ds}{(x-s)^{-\alpha}}\right\}\right)$$

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-s)^{\alpha}f'(s)ds \tag{۲-۹۰}$$

با استفاده از مشتق قاعده لايب نيتز در رابطه (۲-۹۰) داريم

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^x \frac{f'(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}. \tag{۲-۹۱}$$

مثال: معادله انتگرال آبل زير را حل كنيد

$$x=\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1/3}}.$$

حل: با استفاده از جواب معادله انتگرال كلي آبل در رابطه (٢-٩١) داريم:

$$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1, \quad \alpha=\frac{1}{3}$$

$$\varphi(x)=\frac{\sin(\pi/3)}{\pi}\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1/3}}$$

$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^x (x-s)^{-\frac{1}{3}}ds=-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}(x-s)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^x$$

$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}x^{\frac{2}{3}}.$$

معادلات انتگرال منفرد به صورت

$$f(s)=\int_a^s \frac{g(t)dt}{[h(s)-h(t)]^{\alpha}}, \quad 0<\alpha<1 \tag{٢-٩٢}$$

كه در آن $h(t)$ در فاصله (a,b) تابعي اكيدا صعودي و مشتق پذير است و $h'(t)\neq 0$.
براي حل انتگرال زير را در نظر مي گيريم

$$I_0=\int_a^s \frac{h'(u)f(u)du}{[h(s)-h(u)]^{1-\alpha}} \tag{٢-٩٣}$$

كه در انتگرال فوق $f(u)$ عبارت است از:

$$f(u)=\int_a^u \frac{g(t)dt}{[h(u)-h(t)]^{\alpha}} \tag{٢-٩٤}$$

با قرار دادن رابطه (٢-٩٤) در رابطه (٢-٩٣) داريم:

$$I_0=\int_a^s \frac{h'(u)du}{[h(s)-h(u)]^{1-\alpha}}\left(\int_a^u \frac{g(t)dt}{[h(u)-h(t)]^{\alpha}}\right) \tag{٢-٩٥}$$

ترتيب انتگرال گيري را در رابطه (٢-٩٥) تعويض مي كنيم

$$I_0=\int_a^s g(t)dt\left(\int_t^s \frac{h'(u)du}{[h(s)-h(u)]^{1-\alpha}[h(u)-h(t)]^{\alpha}}\right) \tag{٢-٩٦}$$

با تغيير متغير زير

$$w=\frac{h(s)-h(u)}{h(s)-h(t)}, \quad 1-w=\frac{h(u)-h(t)}{h(s)-h(t)}, \quad dw=\frac{-h'(u)du}{h(s)-h(t)}$$

رابطه (٢-٩٦) به صورت زير در مي آيد

$$I_0=\int_a^s g(t)dt\int_0^1 \frac{dw}{w^{1-\alpha}(1-w)^{\alpha}} \tag{٢-٩٧}$$

كه بنا به رابطه (٢-٨٧) حاصل انتگرال طرف دوم رابطه (٢-٩٧) به حالت زير در مي آيد

$$I_0=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^s g(t)dt \tag{٢-٩٨}$$

با مساوي قرار دادن روابط (۲-۹۳) و (۲-۹۸) نتيجه مي شود:

$$\int_a^s g(t)dt = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^s \frac{h'(u)f(u)du}{[h(s)-h(u)]^{1-\alpha}} \tag{۲-۹۹}$$

از طرفين رابطه (۲-۹۹) نسبت به s مشتق مي گيريم

$$g(s) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{ds}\int_a^s \frac{h'(u)f(u)du}{[h(s)-h(u)]^{1-\alpha}}. \tag{۲-۱۰۰}$$

تمرين: اگر معادله انتگرال منفرد به صورت

$$f(s) = \int_s^b \frac{g(t)dt}{[h(t)-h(s)]^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1$$

باشد كه در آن تابع $h(t)$ در فاصله (a,b) صعودي است. ثابت كنيد كه جواب آن به صورت زير است:

$$g(s) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{ds}\int_s^b \frac{h'(u)f(u)du}{[h(u)-h(s)]^{1-\alpha}}.$$

مثال۱: معادلات انتگرال منفرد زير را حل كنيد

$$(a)\qquad f(s) = \int_a^s \frac{g(t)dt}{(s^2-t^2)^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1;\quad a<s<b, \tag{۲-۱۰۱}$$

$$(b)\qquad f(s) = \int_s^b \frac{g(t)dt}{(t^2-s^2)^{\alpha}},\quad o<\alpha<1;\quad a<s<b. \tag{۲-۱۰۲}$$

حل:در معادلات (۲-۱۰۱) و (۲-۱۰۲) ميدانيم كه تابع $h(t)=t^2$ يك تابع صعودي است بنابراين جواب آن معادلات به صورت زير است:

$$g(t) = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{uf(u)du}{(t^2-u^2)^{1-\alpha}},\quad a<t<b. \tag{۲-۱۰۳}$$

و

$$g(t) = -\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^b \frac{uf(u)du}{(u^2-t^2)^{1-\alpha}},\quad a<t<b. \tag{۲-۱۰۴}$$

اگر در معادلات انتگرال مثال۱, a و b به ترتيب به سمت $0,\infty+$ ميل كنند، نتايج (۲-۱۰۳) و (۲-۱۰۴) باز هم معتبر باقي مي مانند. بنابراين معادله انتگرال

$$f(s) = \int_0^s \frac{g(t)dt}{(s^2-t^2)^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1 \tag{۲-۱۰۵}$$

داراي جواب زير است:

$$g(t) = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{uf(u)du}{(t^2-u^2)^{1-\alpha}} \tag{۲-۱۰۶}$$

مشابها, جواب معادله انتگرال

$$f(s) = \int_s^{\infty} \frac{g(t)dt}{(t^2-s^2)^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1 \tag{۲-۱۰۷}$$

به صورت زير است:

$$g(t) = -\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^{\infty} \frac{uf(u)du}{(u^2-t^2)^{1-\alpha}}. \tag{۲-۱۰۸}$$

مثال۲. معادله انتگرال زیر را حل کنید

$$f(s)=\int_a^s \frac{g(t)dt}{(\cos t-\cos s)^{1/2}},\quad o\le a<s<b\le\pi. \qquad (۱۰۹\text{-}۲)$$

حل: با مقايسه معادلات (۲-۹۲) و (۲-۱۰۹)، مي بينيم كه $\alpha=1/2$ و $h(t)=1-\cos t$ يك تابع اكيدا صعودي در فاصله $(0,\pi)$ است. با جايگذاري اين مقدار براي $h(u)$ در رابطه (۲-۱۰۰) جواب آن ايجاب خواهد شد

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\left[\int_a^t \frac{(\sin u)f(u)du}{(\cos u-\cos t)^{1/2}}\right],\quad a<t<b. \qquad (۱۱۰\text{-}۲)$$

مشابها، معادله انتگرال

$$f(s)=\int_s^b \frac{g(t)dt}{(\cos s-\cos t)^{1/2}},\quad 0\le a<s<b\le\pi. \qquad (۱۱۱\text{-}۲)$$

داراي جواب زير است:

$$g(t)=-\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\left[\int_t^b \frac{(\sin u)f(u)du}{(\cos t-\cos u)^{1/2}}\right],\quad a<t<b. \qquad (۱۱۲\text{-}۲)$$

مثال۳. معادله انتگرال فردهولم با هسته لگاريتمي زير را حل كنيد

$$\int_0^1 \ln\frac{s+t}{|s-t|}g(t)dt=\pi f(s),\quad 0<s<1. \qquad (۱۱۳\text{-}۲)$$

حل: براي حل اين معادله انتگرال فردهولم با هسته لگاريتمي، بايد آن را به يك معادله انتگرال از نوع تبديل كنيم. براي اين منظور ابتدا فرض مي كنيم:

$$I_0=\int_0^s \frac{udu}{\left[(s^2-u^2)(t^2-u^2)\right]^{1/2}},\quad 0<s<t<1. \qquad (۱۱۴\text{-}۲)$$

سپس در آن قرار ميدهيم $u=s\sin v$، در اين صورت خواهيم داشت:

$$I_0=\int_0^{\pi/2}\frac{s^2\sin v\cos vdv}{s\cos v(t^2-s^2\sin^2 v)^{1/2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{s\sin vdv}{\left((t^2-s^2)+s^2\cos^2 v\right)^{1/2}}$$

$$I_0=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin vdv}{\left(\frac{t^2-s^2}{s^2}+\cos^2 v\right)^{1/2}}, \qquad (۱۱۵\text{-}۲)$$

با فرض $\alpha=\frac{t^2-s^2}{s^2}$، داريم:

$$I_0=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin vdv}{(\alpha^2+\cos^2 v)^{1/2}}, \qquad (۱۱۶\text{-}۲)$$

با تغيير متغير $\cos v=\alpha x$، رابطه (۲-۱۱۶) به صورت زير در مي آيد

$$I_0=\int_0^{1/\alpha}\frac{\alpha dx}{\sqrt{\alpha^2+\alpha^2x^2}}=\int_0^{1/\alpha}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sinh^{-1}x\Big|_0^{1/\alpha}$$

$$I_0=\sinh^{-1}(1/\alpha)=\sinh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{t^2-s^2}}\right) \qquad (۱۱۷\text{-}۲)$$

با فرض $z = 1/\alpha$, قرار میدهیم:

$$\sinh^{-1} z = \beta \Rightarrow z = \sinh\beta \Rightarrow z = \frac{1}{2}(e^{\beta} - e^{-\beta}) \Rightarrow 2z = \frac{e^{2\beta} - 1}{e^{\beta}}$$

$$e^{2\beta} - 2ze^{\beta} - 1 = 0 \Rightarrow e^{\beta} = z \pm \sqrt{z^2 + 1}$$

$$\beta = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) = \sinh^{-1} z = I_0$$

$$I_o = \ln\left(1/\alpha + \sqrt{(1/\alpha^2) + 1}\right) \tag{۱۱۸-۲}$$

با قرار دادن مقدار α در رابطه (۲-۱۱۸), حاصل I_0 بدست مي آيد

$$I_0 = \ln\left(\frac{s}{(s^2 - t^2)^{1/2}} + \left(\frac{s^2}{t^2 - s^2} + 1\right)^{1/2}\right) = \ln\left(\frac{s + t}{(s^2 - t^2)^{1/2}}\right)$$

$$I_0 = \ln\left(\frac{(s + t)^2}{s^2 - t^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\frac{s + t}{t - s} \tag{۱۱۹-۲}$$

در حالت دوم , I_0' را مانند حالت قبلي به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$I_0' = \int_0^t \frac{udu}{\left[(s^2 - u^2)(t^2 - u^2)\right]^{1/2}}, \qquad 0 < t < s < 1. \tag{۱۲۰-۲}$$

با تغيير متغير $u = t\cos v$, با اعمال حالت اول مقدار I_0' به صورت زير بدست مي آيد

$$I_0' = \frac{1}{2}\ln\frac{s + t}{s - t} \tag{۱۲۱-۲}$$

از روابط (۲-۱۱۹) و (۲-۱۲۱) نتيجه مي گيريم:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{s + t}{|s - t|} = \int_0^{\min(s,t)} \frac{udu}{\left[(s^2 - u^2)(t^2 - u^2)\right]^{1/2}} \tag{۱۲۲-۲}$$

با قرار دادن انتگرال (۲-۱۲۲) در معادله انتگرال با هسته لگاريتمي رابطه (۲-۱۱۳) خواهيم داشت:

$$2\int_0^1 g(t)dt \int_0^{in(s,t)} \frac{udu}{\left[(s^2 - u^2)(t^2 - u^2)\right]^{1/2}} = \pi f(s)$$

$$\frac{\pi}{2} f(s) = \left\{\int_0^1 g(t)dt \int_0^s \frac{udu}{\left[(s^2 - u^2)(t^2 - u^2)\right]^{1/2}} + \int_0^1 g(t)dt \int_0^t \frac{udu}{\left[(s^2 - u^2)(t^2 - u^2)\right]^{1/2}}\right\}$$

با تعويض ترتيب انتگرالگيري داريم:

$$\frac{\pi}{2} f(s) = \int_0^s \frac{udu}{(s^2 - u^2)^{1/2}} \int_u^1 \frac{g(t)dt}{(t^2 - u^2)^{1/2}} \tag{۱۲۳-۲}$$

$$\pi f(s) = 2\int_0^s \frac{uS(u)du}{(s^2 - u^2)^{1/2}} \tag{۱۲۴-۲}$$

كه در آن

$$S(u) = \int_u^1 \frac{g(t)dt}{(t^2 - u^2)^{1/2}}. \tag{۱۲۵-۲}$$

معادلات (۲-۱۲٤) و (۲-۱۲۵) از نوع معادلات انتگرال (۲-۱۰۱) و(۲-۱۰۲) هستند بنابراين جوابهاي آنها به صورت زير مي باشند

$$g(t)=-\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^1\frac{uS(u)du}{(u^2-t^2)^{1/2}} \qquad (١٢٦\text{-}٢)$$

و

$$S(u)=\frac{1}{u}\frac{d}{du}\int_0^u\frac{sf(s)ds}{(u^2-s^2)^{1/2}}=\frac{f(0)}{u}+\int_0^u\frac{f'(y)dy}{(u^2-y^2)^{1/2}}, \qquad (١٢٧\text{-}٢)$$

با استفاده از جواب (٢-١٢٧) مي توان رابطه (٢-١٢٦) را به حالت زير نوشت:

$$g(t)=-\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^1\frac{uS_1(u)du}{(u^2-t^2)^{1/2}}+\frac{2}{\pi}\frac{f(0)}{t(1-t^2)^{1/2}} \qquad (١٢٨\text{-}٢)$$

که در آن $S_1(u)$ برابر است با:

$$S_1(u)=\int_0^u\frac{f'(y)dy}{(u^2-y^2)^{1/2}}. \qquad (١٢٩\text{-}٢)$$

با جايگذاري مقدار $S_1(u)$ در معادله (٢-١٢٨) و تعويض ترتيب انتگرال گيري داريم:

$$g(t)=-\frac{2}{\pi}\frac{t}{(1-t^2)^{1/2}}\int_t^1\frac{(1-s^2)^{1/2}f'(s)ds}{s^2-t^2}+\frac{2}{\pi}\frac{f(0)}{t(1-t^2)^{1/2}}. \qquad (١٣٠\text{-}٢)$$

مثال١. معادله انتگرال آبل زير را حل كنيد

$$\int_0^s\frac{g(t)dt}{(s-t)^\alpha}=\frac{H(s-c)}{(s-c)^\alpha},\qquad 0<\alpha<1,\quad c>0. \qquad (١٣١\text{-}٢)$$

حل: بنا به معادله انتگرال آبل

$$f(s)=\int_0^s\frac{\varphi(t)dt}{(s-t)^\alpha},$$

و جواب آن

$$\varphi(s)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{ds}\int_0^s\frac{f'(t)dt}{(s-t)^{1-\alpha}},$$

داريم:

$$f(t)=\frac{H(t-c)}{(t-c)^\alpha}\Rightarrow f'(t)=\frac{\delta(t-c)(t-c)^\alpha-\alpha(t-c)^{\alpha-1}H(t-c)}{(t-c)^{2\alpha}} \qquad (١٣٢\text{-}٢)$$

$$g(s)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{ds}\int_0^s\frac{H(t-c)dt}{(s-t)^{1-\alpha}(t-c)^\alpha}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\delta(s-c), \qquad (١٣٣\text{-}٢)$$

كه در آن

$$H(s-c)=\int_0^s\frac{H(t-c)dt}{(s-t)^{1-\alpha}(t-c)^\alpha}\Rightarrow\frac{d}{ds}H(s-c)=\delta(s-c). \qquad (١٣٤\text{-}٢)$$

وقتي كه $c\to 0^+$،

$$g(s)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\delta(s).$$

معادله انتگرال فردهولم همگن و مقادير ويژه

مثال١. معادله انتگرال فردهولم همگن زير را حل كنيد

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1\left(t\sqrt{x}+x\sqrt{t}\right)\varphi(t)dt. \qquad (١٣٥\text{-}٢)$$

حل:

$$\varphi(x)=\lambda\left\{\sqrt{x}\int_0^1 t\varphi(t)dt - x\int_0^1 \sqrt{t}\varphi(t)dt\right\} \qquad (۲-۱۳۶)$$

$$\begin{cases} c_1=\int_0^1 t\varphi(t)dt \\ c_2=\int_0^1 \sqrt{t}\varphi(t)dt \end{cases} \qquad (۲-۱۳۷)$$

با جایگذاري رابطه (۲-۱۳۷) در رابطه (۲-۱۳۶) داريم:

$$\varphi(x)=c_1\lambda\sqrt{x}-c_2\lambda x \Rightarrow \varphi(t)=c_1\lambda\sqrt{t}-c_2\lambda t \qquad (۲-۱۳۸)$$

با قرار دادن رابطه (۲-۱۳۸) در رابطه (۲-۱۳۷) و حل دستگاه مقادير c_1 و c_2 بدست مي آيند

$$\begin{cases} c_1=c_1\lambda\int_0^1 t^{3/2}dt-c_2\lambda\int_0^1 t^2dt \\ c_2=c_1\lambda\int_0^1 tdt-c_2\lambda\int_0^1 t^{3/2}dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\frac{2}{5}c_1\lambda-\frac{1}{3}c_2\lambda \\ c_2=\frac{1}{2}c_1\lambda-\frac{2}{5}c_2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\frac{2}{5}\lambda)c_1+\frac{\lambda}{3}c_2=0 \\ \frac{\lambda}{2}c_1-(1+\frac{2}{5}\lambda)c_2=0 \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3} \\ \frac{\lambda}{2} & 1+\frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix}=\frac{4}{25}\lambda^2-1-\frac{\lambda^2}{6}=-\left(1+\frac{\lambda^2}{150}\right)<0.$$

چون $\Delta(\lambda)\neq 0$, بنابراين $c_1=c_2=0$, يعني مقادير ويژه ندارد درنتيجه

$$\varphi(t)=0.$$

مثال۲. معادله انتگرال فردهولم همگن $\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi K(x,t)\varphi(t)dt,$ را با هسته زير حل كنيد

$$K(x,t)=\begin{cases} \cos x\sin t, & 0\le x\le t \\ \cos t\sin x, & t\le x\le \pi \end{cases}$$

حل: هسته را در انتگرال قرار مي دهيم

$$\varphi(x)=\lambda\left\{\sin x\int_0^x \cos t\varphi(t)dt+\cos x\int_x^\pi \sin t\varphi(t)dt\right\} \qquad (۲-۱۳۸)$$

از طرفين رابطه (۲-۱۳۸) مشتق مي گيريم و با استفاده از قاعده لايب نيتز داريم:

$$\varphi'(x)=\lambda\left\{\cos x\int_0^x \cos t\varphi(t)dt+\sin x\cos x\varphi(x)-\sin x\int_x^\pi \sin t\varphi(t)dt-\cos x\sin x\varphi(x)\right\}$$

$$\varphi'(x)=\lambda\left\{\cos x\int_0^x \cos t\varphi(t)dt-\sin x\int_x^\pi \sin t\varphi(t)dt\right\} \qquad (۲-۱۳۹)$$

دوباره از طرفين رابطه (۲-۱۳۹) مشتق مي گيريم:

$$\varphi''(x) = \lambda\left\{-\sin x\int_0^x \cos t\varphi(t)dt + \cos^2 x\varphi(x) - \cos x\int_x^\pi \sin t\varphi(t)dt + \sin^2 x\varphi(x)\right\}$$

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) - \varphi(x)$$

$$\varphi''(x) + (1-\lambda)\varphi(x) = 0 \qquad (١٤٠\text{-}٢)$$

الف) اگر $\lambda = 1$ ، آنگاه

$$\varphi''(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = c_1 x + c_2$$

$$\begin{cases}\varphi(\pi) = 0 \Rightarrow c_1\pi + c_2 = 0 \\ \varphi'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0\end{cases} \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0.$$

ب) اگر $\lambda > 1$ ،آنگاه جواب معادله دیفرانسیل (٢-١٤٠) به صورت زیر خواهد بود

$$m^2 + (1-\lambda) = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{\lambda - 1}$$

$$\varphi(x) = c_1\cosh\left(\sqrt{\lambda-1}\right)x + c_2\sinh\left(\sqrt{\lambda-1}\right)x. \qquad (١٤١\text{-}٢)$$

$$\begin{cases}\varphi(\pi) = 0 \\ \varphi'(0) = 0\end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0.$$

ج) اگر $\lambda < 1$ ، دراین صورت $\lambda - 1 < 0$ ، بنابراین

$$m^2 = \lambda - 1 < 0 \Rightarrow m = \pm i\sqrt{1-\lambda}$$

$$\varphi(x) = c_1\cos\left(\sqrt{1-\lambda}\right)x + c_2\sin\left(\sqrt{1-\lambda}\right)x \qquad (١٤٢\text{-}٢)$$

با استفاده از شرایط اولیه در رابطه (٢-١٤٢) مي توان مقادیر c_1 و c_2 را پیدا کرد

$$\begin{cases}\varphi(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 \neq 0 \\ \varphi'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \cos\left(\sqrt{1-\lambda}\right)\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{1-\lambda} = k + \frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$\varphi(x) = c_1\cos\left(\sqrt{1-\lambda}\right)x \Rightarrow \varphi(x) = c_1\cos(k + \frac{1}{2})x.$$

مثال۳. معادله انتگرال فردهولم مرتبه دوم زیر را حل کنید

$$\varphi(x) = e^x + \lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt, \qquad K(x,t) = \begin{cases}\dfrac{\sinh x\sinh(t-1)}{\sinh 1}, & 0 \le x \le t \\ \dfrac{\sinh t\sinh(x-1)}{\sinh 1}, & t \le x \le 1\end{cases}$$

حل: با جایگذاري هسته در انتگرال داریم:

$$\varphi(x) = e^x + \lambda\left\{\frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1}\int_0^x \sinh t\varphi(t)dt + \frac{\sinh x}{\sinh 1}\int_x^1 \sinh(t-1)\varphi(t)dt\right\} \qquad (١٤٣\text{-}٢)$$

با استفاده از رابطه (٢-١٤٣) مقادیر اولیه را مي توان به کار برد

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi(1) = e. \qquad (١٤٤\text{-}٢)$$

از طرفین رابطه (٢-١٤٣) مشتق مي گیریم و از قاعده لایب نیتز در مشتق استفاده مي کنیم:

$$\varphi'(x) = e^x + \lambda\left\{\frac{\cosh(x-1)}{\sinh 1}\int_0^x \sinh t\varphi(t)dt + \frac{\cosh x}{\sinh 1}\int_x^1 \sinh(t-1)\varphi(t)dt\right\} \qquad (١٤٥\text{-}٢)$$

دوباره از طرفین رابطه (٢-١٤٥) مشتق گیري کرده و بعد از ساده کردن داریم:

$$\varphi''(x) = e^x + (\lambda+1)\varphi(x) - e^x$$

$$\varphi''(x) - (1+\lambda)\varphi(x) = 0 \qquad (١٤٦\text{-}٢)$$

الف) اگر $\lambda=-1$ ، آنگاه $\varphi''(x)=0$. بنابراين

$$\varphi(x)=c_1x+c_2$$

از مقادير اوليه داريم:

$$\begin{cases}\varphi(0)=1\Rightarrow c_2=1\\ \varphi(1)=e\Rightarrow c_1=e-1\end{cases}\Rightarrow \varphi(x)=(e-1)x+1.$$

ب) اگر $\lambda>-1$ ، آنگاه معادله (٢-١٤٦) داراي جوابي به صورت زير خواهد داشت:

$$m^2-(\lambda+1)=0\Rightarrow m=\pm\sqrt{\lambda+1}$$

$$\varphi(x)=c_1\cosh\left(\sqrt{\lambda+1}\right)x+c_2\sinh\left(\sqrt{\lambda+1}\right)x \qquad (١٤٧\text{-}٢)$$

$$\begin{cases}\varphi(0)=1\Rightarrow c_1=1\\ \varphi(1)=e\Rightarrow \cosh\sqrt{\lambda+1}+c_2\sinh\sqrt{\lambda+1}=e\end{cases}\Rightarrow c_2=\frac{e}{\sinh\sqrt{\lambda+1}}-\coth\sqrt{\lambda+1}$$

$$\varphi(x)=\cosh(\sqrt{\lambda+1})x+\left(\frac{e}{\sinh\sqrt{\lambda+1}}-\coth\sqrt{\lambda+1}\right)\sinh(\sqrt{\lambda+1})x.$$

ج) اگر $\lambda<-1$ ، در اين حالت جواب معادله (٢-١٤٦) را مي توان به شكل زير نوشت

$$m=\pm i\sqrt{-(\lambda+1)}$$

$$\varphi(x)=c_1\cos\sqrt{-(\lambda+1)}x+c_2\sin\sqrt{-(\lambda+1)}x. \qquad (١٤٨\text{-}٢)$$

با استفاده از مقادير اوليه, ثابتهاي c_1 و c_2 پيدا مي شوند

$$\begin{cases}\varphi(0)=1\Rightarrow c_1=1\\ \varphi(1)=e\Rightarrow c_2=\dfrac{e}{\sin\sqrt{-(\lambda+1)}}-\cot\sqrt{-(\lambda+1)},\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\cos\sqrt{-(\lambda+1)}x+\left(\frac{e}{\sin\sqrt{-(\lambda+1)}}-\cot\sqrt{-(\lambda+1)}\right)\sin\sqrt{-(\lambda+1)}x.$$

حل برخي از معادلات انتگرال بكمك تبديلات ملين و لاپلاس

تعريف تبديل ملين و معكوس تبديل ملين

$$F(s)=\mathrm{M}\{f(x)\}=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx \qquad (١٤٩\text{-}٢)$$

و

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}x^{-s}F(s)ds \qquad (١٥٠\text{-}٢)$$

تبديل ملين تابع كانولوشن (پيچش)

$$H(x)=\{f*g\}_{(x)}=\int_0^\infty f(t)g(\frac{x}{t})\frac{dt}{t},$$

$$\mathrm{M}\{H(x)\}=F(s)G(s). \qquad (١٥١\text{-}٢)$$

كه در آن G,F تبديل ملين توابع g,f هستند.

مثال١. معادله انتگرال زير را حل كنيد

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^\infty k(\frac{x}{t})\varphi(t)\frac{dt}{t} \qquad (١٥٢\text{-}٢)$$

حل: فرض کنيم $K(s), F(s), \Phi(s)$ به ترتيب تبديلات ملين $k(x), f(x), \varphi(x)$ باشند، با محاسبه تبديل ملين معادله (٢-١٥٢) داريم:

$$\Phi(s) = F(s) + K(s)\Phi(s) \Rightarrow \Phi(s) = \frac{F(s)}{1-K(s)} \qquad (١٥٣-٢)$$

براي محاسبه تابع $\varphi(x)$ از رابطه (٢-١٥٣) معكوس تبديل ملين مي گيريم

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-s}\frac{F(s)}{1-K(s)}ds. \qquad (١٥٤-٢)$$

مثال٢. معادله انتگرال زير را حل كنيد

$$\varphi(x) = e^{-ax} + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}}\varphi(t)dt \qquad (١٥٥-٢)$$

حل: ابتدا تبديل ملين تابع e^{-ax} را بدست مي آوريم

$$\mathrm{M}\{e^{-ax}\} = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-ax}dx \qquad (١٥٦-٢)$$

با تغييرمتغير $ax = z$ داريم:

$$\mathrm{M}\{e^{-ax}\} = \int_0^\infty e^{-z}z^{s-1}\frac{dz}{a^s} = \frac{1}{a^s}\int_0^\infty e^{-z}z^{s-1}dz = \frac{\Gamma(s)}{a^s}. \qquad (١٥٧-٢)$$

بنابراين با استفاده از رابطه (٢-١٥٧) براي $a = 1$ داريم:

$$\mathrm{M}\{e^{-x}\} = \Gamma(s). \qquad (١٥٨-٢)$$

با جايگذاري روابط (٢-١٥٧) و (٢-١٥٨) در (٢-١٥٤) داريم:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{a^s}.\frac{x^{-s}}{1-\frac{1}{2}\Gamma(s)}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{2\Gamma(s)ds}{(ax)^s(2-\Gamma(s))} \qquad (١٥٩-٢)$$

با استفاده از قضيه مانده ها در انتگرال (٢-١٥٩) داريم:

$2-\Gamma(s) = 0 \Rightarrow \Gamma(s) = 2 = (s-1)! \Rightarrow s = 3$ قطب ساده،

$\varphi(x) = \dfrac{2\Gamma(s)}{(ax)^3\Gamma'(s)}, \quad \dfrac{\Gamma(s)}{\Gamma'(s)} = \dfrac{3}{2} - \gamma, \quad \gamma$ ثابت اويلر

معادله انتگرال فاكس(FOX) :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty k(xt)\varphi(t)dt \qquad (١٦٠-٢)$$

طرفين معادله انتگرال (٢-١٦٠) را در x^{s-1} ضرب كرده و در فاصله $(0,\infty)$ نسبت به x انتگرال مي گيريم

$$\int_0^\infty x^{s-1}\varphi(x)dx = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx + \int_0^\infty x^{s-1}dx\int_0^\infty k(xt)\varphi(t)dt \qquad (١٦١-٢)$$

بنا به تعريف تبديل ملين (٢-١٦١) داريم:

$$\Phi(s) = F(s) + \int_0^\infty \varphi(t)dt\int_0^\infty k(xt)x^{s-1}dx \qquad (١٦٢-٢)$$

با تغيير متغير $xt = y$ معادله انتگرال (٢-١٦٢) به صورت زير در مي آيد

$$\Phi(s) = F(s) + \int_0^\infty \varphi(t)dt\int_0^\infty k(y)(\frac{y}{t})^{s-1}\frac{dy}{t} \qquad (١٦٣-٢)$$

$$\Phi(s)=F(s)+\int_0^\infty t^{-s}\varphi(t)dt\int_0^\infty y^{s-1}k(y)dy \qquad (٢\text{-}١٦٤)$$

$$\Phi(s)=F(s)+K(s)\Phi(1-s) \qquad (٢\text{-}١٦٥)$$

با قرار دادن $s-1$ به جاي s در رابطه (٢-١٦٥) داريم:

$$\Phi(1-s)=F(1-s)+K(1-s)\Phi(s) \qquad (٢\text{-}١٦٦)$$

رابطه (٢-١٦٦) را در رابطه (٢-١٦٥) جايگذاري مي كنيم:

$$\Phi(s)=F(s)+K(s)[F(1-s)+K(1-s)\Phi(s)] \qquad (٢\text{-}١٦٧)$$

$$\Phi(s)=\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1-K(s)K(1-s)} \qquad (٢\text{-}١٦٨)$$

اگر از رابطه (٢-١٦٨) معكوس تبديل ملين بگيريم، خواهيم داشت:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1-K(s)K(1-s)}x^{-s}ds. \qquad (٢\text{-}١٦٩)$$

مثال ١. معادله انتگرال زير را حل كنيد

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\varphi(t)\cos xt dt. \qquad (٢\text{-}١٧٠)$$

حل: ابتدا تبديل ملين تابع $k(x)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$ را پيدا مي كنيم

$$K(s)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^{s-1}\cos x dx \qquad (٢\text{-}١٧١)$$

بنا به تعريف تابع گاما داريم:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx\Rightarrow\int_0^\infty e^{-ix}x^{z-1}dx=e^{-i\frac{\pi}{2}z}\Gamma(z),\quad 0<z<1 \qquad (٢\text{-}١٧٢)$$

رابطه (٢-١٧٢) را با استفاده از قضيه مانده هااثبات كنيد؟ از آن رابطه نتيجه مي گيريم:

$$\int_0^\infty(\cos x-i\sin x)x^{z-1}dx=\left(\cos\frac{\pi}{2}x-i\sin\frac{\pi}{2}x\right)\Gamma(z) \qquad (٢\text{-}١٧٣)$$

$$\int_0^\infty x^{z-1}\cos x dx=\Gamma(z)\cos\frac{\pi}{2}z \qquad (٢\text{-}١٧٤)$$

$$\int_0^\infty x^{z-1}\sin x dx=\Gamma(z)\sin\frac{\pi}{2}z \qquad (٢\text{-}١٧٥)$$

لذا با استفاده از رابطه (٢-١٧٤) تبديل ملين تابع $k(x)$ عبارت است از:

$$K(s)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s \qquad (٢\text{-}١٧٦)$$

و

$$K(1-s)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\Gamma(1-s)\cos\frac{\pi}{2}(1-s)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi}{2}s \qquad (٢\text{-}١٧٧)$$

حاصلضرب طرفين روابط (٢-١٧٦) و (٢-١٧٧) با استفاده از خاصيت $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$ به حالت زير در مي آيد

$$K(s)K(1-s)=\lambda^2.\frac{2}{\pi}\Gamma(s)\Gamma(1-s)\cos\frac{\pi}{2}s.\sin\frac{\pi}{2}s$$

$$K(s)K(1-s)=\lambda^2.\frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{\sin\pi s}.\frac{1}{2}\sin\pi s$$

$$K(s)K(1-s)=\lambda^2 \qquad (١٧٨\text{-}٢)$$

بنا به جواب معادله انتگرال FOX در رابطه (٢-١٦٩) داريم:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1-K(s)K(1-s)}x^{-s}ds$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}(F(s)+K(s)F(1-s))x^{-s}ds\right\} \qquad (١٧٩\text{-}٢)$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)x^{-s}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}K(s)F(1-s)x^{-s}ds\right\} \qquad (١٨٠\text{-}٢)$$

با توجه به عكس تبديل ملين داريم:

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda^2}f(x)+\frac{1}{1-\lambda^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}K(s)F(1-s)x^{-s}ds\right\} \qquad (١٨١\text{-}٢)$$

در رابطه (٢-١٨١) به جاي $K(s)$ و $F(1-s)$ مقادير زير را قرار ميدهيم

$$K(s)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s,$$

و

$$F(1-s)=\int_0^\infty f(t)t^{-s}dt,$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda^2}f(x)+\frac{1}{1-\lambda^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{\pi}{2}s\left(\int_0^\infty f(t)t^{-s}dt\right)ds\right\} \qquad (١٨٢\text{-}٢)$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda^2}f(x)+\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{1}{1-\lambda^2}\int_0^\infty f(t)dt\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s(xt)^{-s}ds\right] \qquad (١٨٣\text{-}٢)$$

كه در آن انتگرال داخل كروشه عكس تبديل ملين $\cos xt$ است، چون

$$\mathrm{M}\{\cos xt\}=\int_0^\infty x^{s-1}\cos xtdx \qquad (١٨٤\text{-}٢)$$

با تغيير متغير $xt=y$ در رابطه (٢-١٨٤) داريم:

$$\mathrm{M}\{\cos xt\}=\int_0^\infty(\frac{y}{t})^{s-1}\cos y.\frac{dy}{t}=t^{-s}\int_0^\infty y^{s-1}\cos ydy$$

$$=t^{-s}\mathrm{M}\{\cos y\}=t^{-s}\Gamma(s).\cos\frac{\pi}{2}s.$$

بنابراين رابطه (٢-١٨٣) به صورت زير در مي آيد

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda^2}f(x)+\frac{\lambda}{1-\lambda^2}.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos xtdt. \qquad (١٨٥\text{-}٢)$$

مثال۲. معادله انتگرال زير را حل كنيد

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\phi(t)\cos xtdt \qquad (۲\text{-}۱۸۶)$$

حل: جواب اين معادله انتگرال با توجه به معادله انتگرال FOX بصورت زير مي باشد

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1-K(s)K(1-s)}x^{-s}ds \qquad (۲\text{-}۱۸۹)$$

$$k(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x \qquad (۲\text{-}۱۹۰)$$

از طرفين تساوي (۲-۱۹۰) تبديل ملين مي گيريم

$$K(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}x^{s-1}\cos xdx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s \qquad (۲\text{-}۱۹۱)$$

$$K(1-s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(1-s)\cos\frac{\pi}{2}(1-s)$$

$$K(1-s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi}{2}s \qquad (۲\text{-}۱۹۲)$$

$$K(s)K(1-s)=\frac{1}{\pi}\Gamma(s)\Gamma(1-s)\cos\frac{\pi}{2}s.\sin\frac{\pi}{2}s$$

$$K(s)K(1-s)=\frac{1}{\pi}\Gamma(s)\Gamma(1-s)\frac{\sin\pi s}{2} \qquad (۲\text{-}۱۹۳)$$

چون $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$ ، با جايگذاري در رابطه (۲-۱۹۳) داريم:

$$K(s)K(1-s)=\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{\sin\pi s}.\frac{\sin\pi s}{2}=\frac{1}{2} \qquad (۲\text{-}۱۹٤)$$

حال از تابع $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ تبديل ملين مي گيريم

$$F(s)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{1+x^2}dx \qquad (۲\text{-}۱۹٥)$$

با تغيير متغير $x=\tan\theta$ و $dx=(1+\tan^2\theta)d\theta$ كه حدود انتگرال از 0 تا ∞ به 0 تا $\frac{\pi}{2}$ تغيير مي يابد

$$F(s)=\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^{s-1}\theta}{1+\tan^2\theta}(1+\tan^2\theta)d\theta=\int_0^{\pi/2}\tan^{s-1}\theta d\theta$$

$$F(s)=\int_0^{\infty}\sin^{s-1}\theta.\cos^{1-s}\theta d\theta \qquad (۲\text{-}۱۹٦)$$

با توجه به رابطه تابع بتا در انتگرال مثلثاتي داريم

$$B(m,n)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta d\theta \qquad (۲\text{-}۱۹۷)$$

با مقايسه دو رابطه (۲-۱۹٦) و (۲-۱۹۷) داريم:

$$2m-1=s-1\Rightarrow m=\frac{s}{2}$$
$$2n-1=1-s\Rightarrow n=1-\frac{s}{2} \qquad (١٩٨\text{-}٢)$$

حالا با جايگذاري رابطه (٢-١٩٨) در رابطه (٢-١٩٦) خواهيم داشت:

$$F(s)=\frac{1}{2}B(\frac{s}{2},1-\frac{s}{2}) \qquad (١٩٩\text{-}٢)$$

كه بنا به رابطه بين تابع بتا و تابع گاما، رابطه (٢-١٩٩) را مي توان بصورت زير نوشت

$$F(s)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}{\Gamma(1)} \qquad (٢٠٠\text{-}٢)$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{s}{2}\pi} \qquad (٢٠١\text{-}٢)$$

$$F(1-s)=\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2}s} \qquad (٢٠٢\text{-}٢)$$

با جايگذاري مقدار رابطه (٢-١٩٤) در تابع (٢-١٩٦) نتيجه مي شود

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1/2}x^{-s}ds$$

$$\varphi(x)=2\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)x^{-s}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}K(s)F(1-s)x^{-s}ds\right\} \qquad (٢٠٣\text{-}٢)$$

بنا به عكس تبديل ملين در (٢-٢٠٣) داريم

$$\varphi(x)=2f(x)+2\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}K(s)F(1-s)x^{-s}ds\right\} \qquad (٢٠٤\text{-}٢)$$

با قرار دادن عبارت $1-s$ به جاي پارامتر s در تعريف تبديل ملين تابع $f(t)$ داريم:

$$F(1-s)=\int_0^\infty f(t)t^{-s}dt \qquad (٢٠٥\text{-}٢)$$

با جايگذاري روابط (٢-١٩٠) و (٢-٢٠٥) در (٢-٢٠٤) خواهيم داشت:

$$\varphi(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s\left(\int_0^\infty f(t)t^{-s}dt\right)x^{-s}ds\right\}$$

$$\varphi(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^\infty f(t)dt\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s(xt)^{-s}ds\right)\right\} \qquad (٢٠٦\text{-}٢)$$

با توجه به معكوس تبديل ملين، رابطه (٢-٢٠٦) به حالت زير در مي آيد

$$\varphi(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(xt)dt$$

$$\varphi(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt \qquad (٢٠٧\text{-}٢)$$

با توجه به حاصل انتگرال زیر، که با استفاده از قضیه مانده ها بدست می آید

$$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2}e^{-x},$$

تابع $\varphi(x)$ حاصل می شود

$$\varphi(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\frac{\pi}{2}e^{-x} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{2}{1+x^2} + \sqrt{\pi}e^{-x}.$$

حل معادله انتگرال با استفاده از تبدیل لاپلاس

معادلات انتگرال ولترا با هسته کانولوشن

$$f(x) = \int_0^x k(x^2-t^2)g(t)dt \qquad (۲۰۸-۲)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس می توان معادله (۲-۲۰۸)را باهسته کانولوشن حل کرد. براي این منظور, در مرحله اول قرار می دهیم:

$$x^2 = u, \quad t^2 = v, \quad f(\sqrt{u}) = f_1(u), \quad \frac{1}{2\sqrt{v}}g(\sqrt{v}) = g_1(v). \qquad (۲۰۹-۲)$$

آنگاه معادله انتگرال (۲-۲۰۸) به شکل زیر در می آید

$$f_1(u) = \int_0^u k(u-v)g_1(v)dv \qquad (۲۱۰-۲)$$

از طرفین معادله (۲-۲۱۰) تبدیل لاپلاس می گیریم

$$F_1(s) = K(s)G_1(s) \Rightarrow G_1(s) = \frac{F_1(s)}{K(s)} = \frac{sF_1(s)}{sK(s)} \qquad (۲۱۱-۲)$$

با تعریف $\frac{1}{sK(s)} = H(s)$، رابطه (۲-۲۱۱) به حالت زیر در می آید

$$G_1(s) = sH(s)F_1(s) \qquad (۲۱۲-۲)$$

با استفاده از تبدیلات لاپلاس تابع کانولوشن و مشتق تابع در (۲-۲۱۲) داریم:

$$G_1(s) = L\{g_1(u)\} = L\left\{\frac{d}{du}\int_0^u h(u-v)f_1(v)dv\right\} \qquad (۲۱۳-۲)$$

یا

$$g_1(u) = \frac{d}{du}\int_0^u h(u-v)f_1(v)dv, \qquad (۲۱۴-۲)$$

که $h(x)$ از معکوس تبدیل لاپلاس تابع $H(s)$ بدست می آید. و نهایتا ، از معادلات (۲-۲۰۹) و (۲-۲۱۴) جواب زیر نتیجه می شود:

$$g(x) = g_1(x^2) = 2\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)h(x^2-t^2)dt. \qquad (۲۱۵-۲)$$

دو حالت زیر را براي حل معادله (۲-۲۰۸) در نظر می گیریم:

مثال۱. اگـر $0<\alpha<1$, $k(t)=t^{-\alpha}$, آنگاه معادله انتگرال زیر را حل کنید

$$f(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{(x^2-t^2)^\alpha}dt. \qquad (۲۱۶-۲)$$

حل: براي استفاده از جواب (۲-۲۱۵) بايستي تابع $h(x)$ را از رابطه زير بدست آوريم:

$$H(s)=\frac{1}{sK(s)} \qquad (۲\text{-}۲۱۷)$$

اما

$$K(s)=L\{k(t)\}=\int_0^\infty t^{-\alpha}e^{-st}dt=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}. \qquad (۲\text{-}۲۱۸)$$

بنابراين

$$h(x)=L^{-1}\left\{\frac{1}{sK(s)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha\Gamma(1-\alpha)}\right\}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\right\}, \qquad (۲\text{-}۲۱۹)$$

با توجه به $L^{-1}\{s^{-\alpha}\}=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ و خاصيت $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ در رابطه (۲-۲۱۹) داريم:

$$h(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}x^{\alpha-1}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}x^{\alpha-1} \qquad (۲\text{-}۲۲۰)$$

و با قرار دادن رابطه (۲-۲۲۰) در معادله (۲-۲۱۵) جواب نتيجه مي شود

$$g(x)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{tf(t)dt}{(x^2-t^2)^{1-\alpha}}. \qquad (۲\text{-}۲۲۱)$$

که مطابق با رابطه (۲-۱۰۳) است.

مثال۲. اگر $k(t)=t^{-1/2}\cos(\beta t^{1/2})$ ، و β عدد ثابت باشد. آنگاه معادله انتگرال زير را حل کنيد

$$f(x)=\int_0^x\frac{\cos\left[\beta(x^2-t^2)^{1/2}\right]}{(x^2-t^2)^{1/2}}g(t)dt, \quad x>0, \qquad (۲\text{-}۲۲۲)$$

حل: در اين حالت

$$K(s)=L\{t^{-1/2}\cos(\beta t^{1/2})\}=\sqrt{\pi}\exp(-\frac{\beta^2}{4s}) \qquad (۲\text{-}۲۲۳)$$

بنابراين

$$h(x)=L^{-1}\left\{\pi^{-1/2}s^{-1}\cos(\frac{\beta^2}{4s})\right\}=\frac{1}{\pi\sqrt{x}}\cosh(\beta x^{1/2}) \qquad (۲\text{-}۲۲۴)$$

لذا جواب معادله با استفاده از روابط (۲-۲۱۵) و (۲-۲۲۴) بدست مي آيد

$$g(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\cosh\left[\beta(x^2-t^2)^{1/2}\right]}{(x^2-t^2)^{1/2}}tf(t)dt. \qquad (۲\text{-}۲۲۵)$$

معادلات انتگرال کشي نوع اول

معادله انتگرال منفرد

$$P.V.\int_0^1\frac{g(t)dt}{t-s}=f(s), \quad 0<s<1 \qquad (۲\text{-}۲۲۶)$$

را در نظر مي گيريم که انتگرال با جمله مقدار اصلي (principal value) شناخته مي شود. هسته

$$K(s-t)=\frac{1}{t-s}$$

را هسته کشي و معادله شامل اين هسته را معادله انتگرال منفرد از نوع کشي مي گويند.
براي حل معادله (۲-۲۲۶) طرفين آن را در s ضرب مي کنيم:

$$P.V.\int_0^1 \frac{sg(t)dt}{t-s} = sf(s) \qquad (۲-۲۲۷)$$

$$P.V.\int_0^1 \frac{(s-t)g(t)+tg(t)}{t-s}dt = sf(s)$$

$$P.V.\int_0^1 \frac{tg(t)dt}{t-s} = sf(s)+c \qquad (۲-۲۲۸)$$

که در آن

$$c=\int_0^1 g(t)dt.$$

حالا , طرفين معادله (۲-۲۲۸) را در $ds/\sqrt{s(u-s)}$ ضرب كرده و از آن در فاصله $(0,u)$ انتگرال مي گيريم:

$$\int_0^u \frac{ds}{\sqrt{s(u-s)}}\int_0^1 \frac{tg(t)dt}{t-s} = \int_0^u \frac{sf(s)ds}{\sqrt{s(u-s)}} + c\int_0^u \frac{ds}{\sqrt{s(u-s)}},$$

$$-\int_0^1 tg(t)dt\int_0^u \frac{ds}{(s-t)\sqrt{s(u-s)}} = \int_0^u \frac{\sqrt{s}f(s)ds}{\sqrt{u-s}} + c\int_0^u \frac{ds}{\sqrt{s(u-s)}}, \qquad (۲-۲۲۹)$$

كه در آن حاصل انتگرال دوم، طرف سمت راست معادله (۲-۲۲۹) با استفاده از تابع بتا برابر عدد π است و با استفاده از حاصل انتگرال زير:

$$\int_0^u \frac{ds}{(s-t)\sqrt{s(u-s)}} = \begin{cases} 0, & 0<t<u \\ \dfrac{-\pi}{\sqrt{t(t-u)}}, & u<t \end{cases} \qquad (۲-۲۳۰)$$

رابطه (۲-۲۲۹) به صورت زير بدست مي آيد:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t}g(t)dt}{\sqrt{t-u}} = c + \frac{1}{\pi}\int_0^u \frac{\sqrt{s}f(s)ds}{\sqrt{u-s}}, \qquad (۲-۲۳۱)$$

كه آن معادله انتگرال آبل است. بنابراين جواب آن به حالت زير است:

$$\sqrt{s}g(s) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{ds}\int_s^1 \frac{cdu}{\sqrt{u-s}} - \frac{1}{\pi^2}\frac{d}{ds}\left\{\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{u-s}}\int_0^u \frac{\sqrt{t}f(t)dt}{\sqrt{u-t}}du\right\},$$

يا

$$\sqrt{s}g(s) = \frac{c}{\pi\sqrt{1-t}} - \frac{1}{\pi^2}\frac{d}{ds}\left\{\int_s^1 \frac{du}{\sqrt{u-s}}\int_0^u \frac{\sqrt{t}f(t)dt}{\sqrt{u-t}}du\right\}. \qquad (۲-۲۳۲)$$

با تعويض ترتيب انتگرال گيري در رابطه (۲-۲۳۲) مي توان آن را به شكل استاندارد تبديل كرد. بنابراين داريم:

$$\sqrt{s}g(s) = \frac{c}{\pi\sqrt{1-s}} - \frac{1}{\pi^2}\frac{d}{ds}\left\{\int_0^s \sqrt{t}f(t)dt\int_s^1 \frac{du}{\sqrt{(u-s)(u-t)}} + \int_s^1 \sqrt{t}f(t)dt\int_t^1 \frac{du}{\sqrt{(u-s)(u-t)}}\right\}$$

$$= \frac{c}{\pi\sqrt{1-s}} - \frac{1}{\pi^2}\frac{d}{ds}\left\{\int_0^1 \sqrt{t}f(t)dt\int_{\max(s,t)}^1 \frac{du}{\sqrt{(u-s)(u-t)}}\right\}. \qquad (۲-۲۳۳)$$

حالا با استفاده از نتيجه انتگرال زير مي توان تابع $g(s)$ را از رابطه (۲-۲۳۳) بدست آورد:

$$\int_{\max(s,t)}^{1} \frac{du}{\sqrt{u-s}\sqrt{u-t}} = \ln\left[\frac{\sqrt{1-s}+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-s}-\sqrt{1+t}}\right], \qquad (۲-۲۳۴)$$

براي $s<t$ ، طرف چپ معادله (۲-۲۳۴) عبارت است از:

$$\int_{t}^{1} \frac{du}{\sqrt{u-s}\sqrt{u-t}} = \int_{t}^{1} \frac{du}{\sqrt{u^2-(s+t)u+st}}. \qquad (۲-۲۳۵)$$

با استفاده از فرمول

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)$$

معادله (۲-۲۳۵) نتیجه مي دهد:

$$\int_{t}^{1} \frac{du}{\sqrt{u-s}\sqrt{u-t}} = \left[\ln\left(\sqrt{u^2-(s+t)u+st}+u-\frac{s+t}{2}\right)\right]_t^1$$

$$= \ln\left[\sqrt{(1-s)(1-t)}+(1-t)+\left(\frac{t-s}{2}\right)\right] - \ln\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

$$= \ln\left[\frac{\sqrt{1-s}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-s}-\sqrt{1-t}}\right],$$

كه براي حالت $s>t$ ، نيز اثبات به همان مراحل نياز دارد.
بنابراين

$$g(s) = \frac{c}{\pi\sqrt{s(1-s)}} + \frac{1}{\pi^2\sqrt{s(1-s)}} \int_0^1 \frac{\sqrt{t(1-t)}\,f(t)dt}{s-t}. \qquad (۲-۲۳۶)$$

نكته: با تغيير متغير $t=\dfrac{T-a}{b-a}$ معادله انتگرال (۲-۲۲۶) به معادله انتگرال زير تبديل مي شود

$$P.V.\int_a^b \frac{g(t)dt}{t-s} = f(s), \quad a<s<b, \qquad (۲-۲۳۷)$$

و جواب آن از رابطه (۲-۲۳۶) به حالت زير تبديل مي شود

$$g(s) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{(s-a)(b-s)}}\left[P.V.\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{s-t} f(t)dt + \pi c\right], \quad a<s<b. \qquad (۲-۲۳۸)$$

حالت خاص: وقتي كه $b=1, a=-1$ ، معادله انتگرال فوق به معادله انتگرال هوابر (airfoil) مشهور است.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g(x)dx}{x-y} = f(y), \quad |y|<1, \qquad (۲-۲۳۹)$$

و جواب آن

$$g(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-y^2}\,f(y)}{x-y}dy + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1. \qquad (۲-۲۴۰)$$

حل معادله انتگرال فردهولم منفرد نوع دوم با هسته كشي

$$g(s) = f(s) + \lambda p.v.\int_0^1 \frac{g(t)dt}{t-s}. \qquad (۲-۲۴۱)$$

براي اين منظور، ابتدا انتگرال زير را محاسبه مي كنيم

$$I=\int_0^u\left(\frac{u-s}{s}\right)^{\alpha}\frac{ds}{(u-s)(s-t)} \qquad (٢-٢٤٢)$$

با اعمال تغيير متغير $\frac{u-s}{s}=v$ در انتگرال بالا داريم:

$$I=-\int_0^{\infty}\frac{v^{\alpha-1}}{vt-(u-t)}dv \qquad (٢-٢٤٣)$$

در انتگرال فوق تغيير متغير ديگري به صورت زير وارد مي كنيم:

$$\zeta=\begin{cases}\dfrac{tv}{u-t}, & 0<t<u\\ \dfrac{tv}{t-u}, & t>u\end{cases} \qquad (٢-٢٤٤)$$

اگر $0<t<u$,

$$I=p.v.\int_0^u\left(\frac{u-s}{s}\right)^{\alpha}\frac{ds}{(u-s)(s-t)}=-\frac{1}{t}\left(\frac{u-t}{t}\right)^{\alpha-1}\int_0^{\infty}\frac{\zeta^{\alpha-1}d\zeta}{\zeta-1}$$
$$=\pi\cot\alpha\pi\frac{(u-t)^{\alpha-1}}{t^{\alpha}} \qquad (٢-٢٤٥)$$

و اگر $t>u$,

$$I=-\frac{1}{t}\left(\frac{u-t}{t}\right)^{\alpha-1}\int_0^{\infty}\frac{\zeta^{\alpha-1}d\zeta}{\zeta+1}=-\pi\cos ec\,\alpha\pi.\frac{(u-t)^{\alpha-1}}{t^{\alpha}} \qquad (٢-٢٤٦)$$

بنابراين

$$p.v.\int_0^u\frac{dt}{(u-t)^{\alpha-1}t^{\alpha}(t-s)}=\begin{cases}\dfrac{\pi\cot\alpha\pi}{(u-s)^{1-\alpha}s^{\alpha}}, & 0<s<u\\ \dfrac{-\pi\csc\alpha\pi}{(s-u)^{1-\alpha}s^{\alpha}}, & u<s\end{cases} \qquad (٢-٢٤٧)$$

تابع $\Phi(s,u)$ را به صورت زير تعريف مي كنيم

$$\Phi(s,u)=\frac{1}{(u-s)^{1-\alpha}s^{\alpha}},\quad 0<s<u \qquad (٢-٢٤٨)$$

در ضمن قرار مي دهيم

$$-\pi\cot\alpha\pi=\frac{1}{\lambda} \qquad (٢-٢٤٩)$$

در اين صورت $\Phi(s,u)$ جواب معادله انتگرال زير مي باشد

$$-\lambda p.v.\int_0^u\frac{\Phi(t,u)}{t-s}dt=\Phi(s,u),\quad 0<s<u, \qquad (٢-٢٥٠)$$

و براي $s>u$ داريم:

$$p.v.\int_0^u\frac{\Phi(t,u)}{t-s}dt=-\frac{\pi\csc\alpha\pi}{(s-u)^{1-\alpha}s^{\alpha}},\quad u<s. \qquad (٢-٢٥١)$$

حالا ، معادله انتگرال (٢-٢٤١) را به صورت زير مي نويسيم:

$$sg(s) = sf(s) + \lambda p.v.\int_0^1 \frac{sg(t)}{t-s}dt$$

$$= sf(s) + \lambda p.v.\int_0^1 \frac{-(t-s)g(t)}{t-s}dt + \lambda p.v.\int_0^1 \frac{tg(t)}{t-s}dt,$$

$$sg(s) - sf(s) + \lambda\int_0^1 g(t)dt = \lambda p.v.\int_0^1 \frac{tg(t)}{t-s}dt,$$

$$sg(s) - sf(s) + c = \lambda p.v.\int_0^1 \frac{tg(t)}{t-s}dt \qquad (٢\text{-}٢٥٢)$$

طرفین معادله (٢-٢٥٢) را در $\Phi(s,u)$ ضرب کرده و در فاصله $(0,u)$ نسبت به s انتگرال مي گيريم

$$\lambda\int_0^u \Phi(s,u)\left(p.v.\int_0^1 \frac{tg(t)dt}{t-s}\right)ds = \int_0^u \Phi(s,u)\left(sg(s) - sf(s) + c\right)ds \qquad (٢\text{-}٢٥٣)$$

با تغيير ترتيب انتگرال گيري در طرف اول معادله (٢-٢٥٣) داريم:

$$-\lambda\int_0^u tg(t)dt\int_u^1 \frac{\Phi(s,u)ds}{s-t} - \lambda\int_u^1 tg(t)dt\int_0^u \frac{\Phi(s,u)ds}{s-t}$$

$$= \int_0^u sg(s)\Phi(s,u)ds - \int_0^u sf(s)\Phi(s,u)ds + c\int_0^u \Phi(s,u)ds \qquad (٢\text{-}٢٥٤)$$

با استفاده از مقدار تابع بتا و معادلات (٢-٢٤٨) و (٢-٢٥٠) داريم:

$$\int_0^u \Phi(s,u)ds = \int_0^u \frac{ds}{(u-s)^{1-\alpha}s^{\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \pi\csc\alpha\pi \qquad (٢\text{-}٢٥٥)$$

و

$$p.v.\int_0^u \frac{\Phi(s,u)ds}{s-t} = -\frac{1}{\lambda}\Phi(t,u) = -\frac{1}{\lambda}\frac{1}{(u-t)^{1-\alpha}t^{\alpha}} \qquad (٢\text{-}٢٥٦)$$

با جايگذاري روابط (٢-٢٥٥) و (٢-٢٥٦) در معادله (٢-٢٥٤) ، و پس از ساده كردن به يك معادله انتگرال آبل به شكل زير تبديل مي شود

$$\lambda\pi\csc\alpha\pi\int_u^1 \frac{t^{1-\alpha}g(t)}{(t-u)^{1-\alpha}}dt = -\int_0^u sf(s)\Phi(s,u)ds + c\pi\csc\alpha\pi \qquad (٢\text{-}٢٥٧)$$

كه جواب آن عبارت است از:

$$\lambda t^{1-\alpha}g(t) = \frac{\sin^2\alpha\pi}{\pi^2}\frac{d}{dt}\left[\int_t^1 \frac{du}{(u-t)^{\alpha}}\int_0^u sf(s)\Phi(s,u)ds\right] + \frac{c\sin\alpha\pi}{\pi(1-t)^{\alpha}},$$

يا

$$\lambda t^{1-\alpha}g(t) = \frac{\sin^2\alpha\pi}{\pi^2}\frac{d}{dt}\left[\int_t^1\int_0^u (u-t)^{-\alpha}(u-s)^{\alpha-1}s^{1-\alpha}f(s)dsdu\right] + \frac{c\sin\alpha\pi}{\pi(1-t)^{\alpha}}, \quad 0<t<1. \qquad (٢\text{-}٢٥٨)$$

چون $\cot\alpha\pi = -(\lambda\pi)^{-1}$ ، خواهيم داشت:

$$\sin\alpha\pi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha\pi}} = \frac{\lambda\pi}{\sqrt{1+\lambda^2\pi^2}} \qquad (٢\text{-}٢٥٩)$$

بنابراين معادله (٢-٢٥٨) را مي توان به صورت زير نوشت:

$$g(t)=\frac{\lambda t^{\alpha-1}}{1+\pi^2\lambda^2}\frac{d}{dt}\left[\int_t^1\int_0^u (u-t)^{-\alpha}(u-s)^{\alpha-1}s^{1-\alpha}f(s)dsdu\right]$$

$$+\frac{c}{t^{1-\alpha}(1-t)^{\alpha}\sqrt{1+\pi^2\lambda^2}},\qquad 0<\alpha<1 \qquad (٢\text{-}٢٦٠)$$

و مي توان آن را به شكل استاندارد زير نوشت

$$g(s)=-\frac{f(s)}{1+\pi^2\lambda^2}+\frac{\lambda}{(1+\pi^2\lambda^2)s^{1-\alpha}(1-s)^{\alpha}}\int_0^1\frac{(1-t)^{\alpha}t^{1-\alpha}f(t)dt}{t-s}$$

$$+\frac{c}{s^{1-\alpha}(1-s)^{\alpha}\sqrt{1+\pi^2\lambda^2}},\quad 0<s<1. \qquad (٢\text{-}٢٦١)$$

تبصره: در حالت كلي با تغيير متغير $t=\dfrac{t'-a}{b-a}$ ، در معادله انتگرال بالا و جواب آن به معادله انتگرال منفرد نوع دوم با هسته كشي

$$g(s)=f(s)+\lambda\int_a^b\frac{g(t)dt}{t-s},\qquad a<s<b \qquad (٢\text{-}٢٦٢)$$

و جواب آن به صورت

$$g(s)=-\frac{f(s)}{1+\pi^2\lambda^2}+\frac{\lambda}{(1+\pi^2\lambda^2)(s-a)^{1-\alpha}(b-s)^{\alpha}}\int_a^b\frac{(b-t)^{\alpha}(t-a)^{1-\alpha}f(t)dt}{t-s}$$

$$+\frac{c}{(s-a)^{1-\alpha}(b-s)^{\alpha}},\qquad a<s<b. \qquad (٢\text{-}٢٦٣)$$

مي رسيم ، كه در آن c عدد ثابت دلخواه است.

مثال١: معادله انتگرال زير را حل كنيد

$$\int_a^b\frac{g(t)dt}{t-s}=1,\qquad a<s<b \qquad (٢\text{-}٢٦٤)$$

حل: با قرار دادن $f(t)=1$ در رابطه (٢-٢٣٨) داريم:

$$g(s)=\frac{1}{\pi^2\sqrt{(s-a)(b-s)}}\left[\int_a^b\frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{s-t}dt+\pi c\right],\quad a<s<b,$$

يا

$$g(s)=\frac{s-(a+b)/c}{\pi\sqrt{(s-a)(b-s)}}+\frac{c}{\pi\sqrt{(s-a)(b-s)}},\qquad a<s<b. \qquad (٢\text{-}٢٦٥)$$

مثال٢. معادله انتگرال زير را حل كنيد

$$\int_{-1}^1\ln|s-t|g(t)dt=f(s),\qquad -1<s<1. \qquad (٢\text{-}٢٦٦)$$

حل: از طرفين معادله (٢-٢٦٦) نسبت به s مشتق مي گيريم:

$$\int_{-1}^1\frac{g(t)dt}{s-t}=f'(s),\qquad -1<s<1 \qquad (٢\text{-}٢٦٧)$$

كه جواب آن با استفاده از معادله انتگرال هوابر (airfoil) به صورت زير مي باشد

$$g(s)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1-t^2}{1-s^2}\right]^{1/2}\frac{f'(t)}{t-s}dt+\frac{c}{\pi\sqrt{1-s^2}}, \qquad (٢٦٨-٢)$$

كه در آن $c=\int_{-1}^{1}g(t)dt$. براي پيدا كردن c ، معادله (٢-٢٦٦) را در $1/\sqrt{1-s^2}$ ضرب كرده و در فاصله $(-1,1)$ نسبت به s انتگرال گرفته و پس از تعويض ترتيب انتگرال گيري داريم:

$$\int_{-1}^{1}g(t)dt\int_{-1}^{1}\frac{\ln|s-t|}{\sqrt{1-s^2}}ds=\int_{-1}^{1}\frac{f(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds, \qquad (٢٦٩-٢)$$

اما با جايگذاري جواب معادله انتگرال (٢-٣٥)، در معادله زير داريم:

$$\int_{-1}^{1}\ln|s-t|g(t)dt=1,\quad -1<s<1$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\ln|s-t|}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\pi\ln 2. \qquad (٢٧٠-٢)$$

با استفاده از رابطه (٢-٢٧٠) معادله (٢-٢٦٩) به صورت زير در مي آيد:

$$(-\pi\ln 2)c=\int_{-1}^{1}\frac{f(s)ds}{\sqrt{1-s^2}},$$

بنابراين

$$c=-\frac{1}{\pi\ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{f(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds, \qquad (٢٧١-٢)$$

كه با قرار دادن مقدار c در رابطه (٢-٢٦٨) , جواب معادله انتگرال نتيجه مي شود

$$g(s)=\frac{1}{\pi^2\sqrt{1-s^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}f'(t)}{t-s}dt-\frac{1}{\pi^2\ln 2\sqrt{1-s^2}}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt. \qquad (٢٧٢-٢)$$

مثال٣. معادله انتگرال زير را حل كنيد

$$\int_{a}^{b}\ln|s-t|g(t)dt=f(s),\quad a<s<b. \qquad (٢٧٣-٢)$$

حل: معادله انتگرال (٢-٢٧٣) را مي توان با يك تغيير متغير خطي تبديل به يك معادله روي بازه $(-1,1)$ كرد و براي حل آن رابطه (٢-٢٧٢) را به كار برد. اما با گرفتن مشتق از طرفين رابطه (٢-٢٧٣) نسبت به s تبديل به معادله انتگرال كشي زير مي شود:

$$\int_{a}^{b}\frac{g(t)dt}{s-t}=f'(s),\quad a<s<b, \qquad (٢٧٤-٢)$$

كه جواب آن با توجه به رابطه (٢-٢٣٨) به صورت زير در مي آيد:

$$g(s)=\frac{1}{\pi^2\sqrt{(s-a)(b-s)}}\int_{a}^{b}\frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-s}f'(t)dt+\frac{c}{\pi\sqrt{(s-a)(b-s)}}, \qquad (٢٧٥-٢)$$

كه

$$c=\int_{a}^{b}g(t)dt. \qquad (٢٧٦-٢)$$

براي پيدا كردن ثابت c طرفين (٢-٢٧٣) را در $[(s-a)(b-s)]^{-1/2}$ ضرب كرده و در فاصله (a,b) نسبت به s انتگرال مي گيريم:

$$\int_a^b \frac{ds}{\sqrt{(s-a)(b-s)}}\int_a^b \ln|s-t|g(t)dt = \int_a^b \frac{f(s)ds}{\sqrt{(s-a)(b-s)}},$$

يا

$$\int_a^b g(t)dt\int_a^b \frac{\ln|s-t|}{\sqrt{(s-a)(b-s)}}ds = \int_a^b \frac{f(s)ds}{\sqrt{(s-a)(b-s)}}. \qquad (۲-۲۷۷)$$

اما با توجه به اتحاد (۲-۲۷۰) داريم:

$$\int_a^b \frac{\ln|s-t|}{\sqrt{(s-a)(b-s)}}ds = \int_{-1}^1 \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2}\right)+\ln|s-t|}{\sqrt{1-t^2}}dt = \pi\ln\left(\frac{b-a}{4}\right). \qquad (۲-۲۷۸)$$

بنابراين , رابطه (۲-۲۷۷) به صورت زير بدست مي آيد:

$$c\pi\ln\left(\frac{b-a}{4}\right) = \int_a^b \frac{f(s)ds}{\sqrt{(s-a)(b-s)}}, \qquad (۲-۲۷۹)$$

اگر $b-a\neq 4$ ، آنگاه جواب معادله انتگرال (۲-۲۷۳) با قرار دادن رابطه (۲-۲۷۹) در (۲-۲۷۵) حاصل مي شود

$$g(s) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{(s-a)(b-s)}}\left[\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-s}f'(t)dt + \frac{1}{\ln((b-a)/4)}\int_a^b \frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}\right]. \qquad (۲-۲۸۰)$$

در حالت استثنائي وقتي كه $b-a=4$ ، جواب معادله انتگرال به صورت (۲-۲۷۵) است كه در آن c عدد ثابت دلخواه مي باشد.

براي حالت خاص $b=-a$ ، معادله انتگرال (۲-۲۷۳) و جواب آن رابطه (۲-۲۸۰) به شكل زير در مي آيند

$$\int_{-b}^b \ln(s-t)g(t)dt = f(s), \quad |s|<b. \qquad (۲-۲۸۱)$$

و

$$g(s) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{b^2-s^2}}\left[\int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2-t^2}}{t-s}f'(t)dt + \frac{1}{\ln(b/2)}\int_{-b}^b \frac{f(t)dt}{\sqrt{b^2-t^2}}\right]. \qquad (۲-۲۸۲)$$

قضيه: معادله انتگرال

$$k_1 g(s) + k_2\frac{1}{\pi}p.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)dt}{t-s} = f(s) \qquad (۲-۲۸۳)$$

داراي جوابي به صورت زير مي باشد:

$$g(s) = \frac{k_1 f(s)}{k_1^2+k_2^2} - \frac{k_2}{\pi(k_1^2+k_2^2)}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{t-s}. \qquad (۲-۲۸۴)$$

حالت خاص: اگر $k_2=1, k_1=0$ ، معادلات (۲-۲۸۳) و (۲-۲۸۴) به شكل زير در مي آيند:

$$\frac{1}{\pi}p.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{t-s} = f(s), \qquad (۲-۲۸۵)$$

و

$$g(s) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{t-s} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{s-t} \qquad (۲-۲۸۶)$$

به انتگرال هاي (۲-۲۸۵) و (۲-۲۸۶) زوج هيلبرت گويند.

مثال۱. معادله انتگرال زیر را حل کنید

$$\frac{1}{\pi} p.v.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t)dt}{t-x}=\frac{1}{a^2+x^2} \qquad (۲۸۷-۲)$$

حل: با توجه به انتگرال هیلبرت داریم:

$$g(s)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(a^2+t^2)(t-s)} \qquad (۲۸۸-۲)$$

انتگرال (۲-۲۸۸) را با استفاده از قضیه مانده ها حل مي كنيم كه در قطب ها عبارتند از :

$$z=\pm ia, \quad z=s\,, \qquad \oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{(a^2+z^2)(z-s)}=2\pi i b_{-1} \qquad (۲۸۹-۲)$$

مانده را در قطب ساده $z=ai$ كه در داخل نيم دايره بالاي محور x ها قرار دارد, به صورت زير پيدا مي كنيم

$$b_{-1}=\lim_{z\to ai}(z-ai)F(z)=\lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{1}{(z-ai)(z+ai)(z-s)}=\frac{1}{2ai(ai-s)} \qquad (۲۹۰-۲)$$

از انتگرال (۲-۲۶۶) در روي نيم دايره بالاي محور x ها داريم:

$$\int_{-R}^{s-\varepsilon}F(x)dx+\int_{C_\varepsilon}F(z)dz+\int_{s+\varepsilon}^{R}F(x)dx+\int_{C_R}F(z)dz=2\pi i b_{-1} \qquad (۲۹۱-۲)$$

براي محاسبه انتگرال دوم از طرف چپ ، تغييرمتغير $z-s=\varepsilon e^{i\theta}$ را اعمل مي كنيم:

$$\int_{C_\varepsilon}F(z)dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{\left[a^2+(s+\varepsilon e^{i\theta})^2\right]\varepsilon e^{i\theta}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{id\theta}{a^2+(s+\varepsilon e^{i\theta})^2}=\frac{i}{a^2+s^2}\int_{\pi}^{0}d\theta=\frac{-i\pi}{a^2+s^2} \qquad (۲۹۲-۲)$$

انتگرال چهارم با تغيير متغير $z=\mathrm{R}e^{i\theta}$ ، وقتي $R\to+\infty$ برابر صفر است. و حاصل انتگرال هاي اول و سوم وقتي $R\to+\infty$ و $\varepsilon\to 0$ ، برابر انتگرال (۲-۲۸۸) است. بنابراين داريم:

$$p.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(a^2+t^2)(t-s)}=\frac{i\pi}{a^2+s^2}+\frac{2\pi i}{2ai(ai-s)}$$

يا

$$p.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(a^2+t^2)(t-s)}=\frac{i\pi}{a^2+s^2}-\frac{\pi(ai+s)}{a(a^2+s^2)}=\frac{-\pi s}{a^2+s^2} \qquad (۲۹۳-۲)$$

بنابراين

$$g(s)=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi s}{a^2+s^2}\right)=\frac{s}{a^2+s^2}.$$

مثال۲. معادله انتگرال زیر را حل کنید

$$\frac{1}{\pi} p.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)dt}{t-s}=\sin s \qquad (۲۹۴-۲)$$

حل: با استفاده از انتگرال هيلبرت داريم:

$$g(s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t dt}{s-t}, \qquad (۲۹۵-۲)$$

براي حل آن انتگرال زير را در نظر مي گيريم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}dt}{s-t}=\pi i\sum\left(\operatorname{Re}sf(t),t=s\right)=\pi i(\cos s+i\sin s) \qquad (۲-۲۹۶)$$

با مقايسه قسمتهاي حقيقي و موهومي بدست مي آوريم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tdt}{s-t}=-\sin s, \qquad (۲-۲۹۷)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin tdt}{s-t}=\cos s. \qquad (۲-۲۹۸)$$

بنابراين

$$g(s)=\cos s.$$

راه حل دوم براي حل معادله انتگرال هيلبرت

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{t-x}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)-f(x)+f(x)}{t-x}dt,$$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dt}{t-x}\right\},$$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\left\{\int_{-R}^{R}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}dt+f(x)\ln\left(\frac{R-x}{R+x}\right)\right\}, \qquad (۲-۲۹۹)$$

چون $\ln x$ تابع پيوسته است در نتيجه داريم:

$$\lim_{R\to\infty}\left[\ln\left(\frac{R-x}{R+x}\right)\right]=\ln\left[\lim_{R\to\infty}\frac{R-x}{R+x}\right]=\ln 1=0,$$

بنابراين رابطه (۲-۲۹۹) به صورت زير در مي آيد

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}dt. \qquad (۲-۳۰۰)$$

مثال۳. معادله انتگرال زيررا حل كنيد

$$\frac{1}{\pi}p.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)dt}{t-x}=\frac{1}{x^2+2x+2},\quad x\in R \qquad (۲-۳۰۱)$$

حل: با استفاده از روش دوم حل معادله انتگرال هيلبرت داريم:

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{1}{t^2+2t+2}-\frac{1}{x^2+2x+2}}{x-t}dt,$$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\pi}\frac{(x-t)(x+t)+2(x-t)}{(x^2+2x+2)(t^2+2t+2)(x-t)}dt,$$

يا

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+2x+2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+t+2}{t^2+2t+2}dt \qquad (۲-۳۰۲)$$

حاصل انتگرال (۲-۳۰۲) با استفاده از قضيه مانده ها در قطب ساده $t=i-1$ ، در نيم دايره بالاي محور t ها برابر است با:

$$b_{-1}=\lim_{t\to i-1}(t-i+1)\frac{x+t+2}{t^2+2t+2}=\lim_{t\to i-1}\frac{x+t+2}{t+i+1}=\frac{x+i+1}{2i},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+t+2}{t^2+2t+2}dt = 2\pi i b_{-1} = 2\pi i\,\frac{x+i+1}{2i} = \pi(x+1+i) \qquad (۲\text{-}۳۰۳)$$

بنابراین جواب حقیقي انتگرال برابر است با:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+t+2}{t^2+2t+2}dt = \pi(x+1) \qquad (۲\text{-}۳۰۴)$$

با قرار دادن رابطه (۲-۳۰۴) در (۲-۳۰۲) داريم:

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}.$$

مثال هاي مختلف:

معادلات انتگرال زير را حل کنيد:

$$\textbf{1)}\quad \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty}\varphi(t)\exp(-\frac{t^2}{4x})dt = x^{2/3}+e^{4x}. \qquad (۲\text{-}۳۰۵)$$

حل: از طرفين معادله (۲-۳۰۵) تبديل لاپلاس مي گيريم:

$$L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty}\exp(-\frac{t^2}{4x})\varphi(t)dt\right\} = L\{x^{2/3}\}+L\{e^{4x}\} \qquad (۲\text{-}۳۰۶)$$

با استفاده از قضيه افراز در سمت چپ رابطه (۲-۳۰۶) داريم:

$$\frac{\Phi(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} = \frac{\Gamma(5/3)}{s^{5/3}}+\frac{1}{s-4},$$

$$\Phi(\sqrt{s}) = \frac{\Gamma(5/3)}{s^{7/6}}+\frac{\sqrt{s}}{s-4} \qquad (۲\text{-}۳۰۷)$$

با قرار دادن s به جاي $\sqrt{s}$ در رابطه (۲-۳۰۷) ، تابع $\Phi(s)$ بدست مي آيد

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma(5/3)}{s^{7/3}}+\frac{s}{s^2-4} \qquad (۲\text{-}۳۰۸)$$

از طرفين رابطه (۲-۳۰۸) معکوس تبديل لاپلاس مي گيريم:

$$L^{-1}\{\Phi(s)\} = \Gamma(5/3)L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{7/3}}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-4}\right\}$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})\frac{x^{4/3}}{\Gamma(7/3)}+\cosh 2x$$

با استفاده از خواص $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ و $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}$ از تابع گاما خواهيم داشت:

$$\varphi(x) = \frac{3\pi}{\sqrt{3}\left(\Gamma(1/3)\right)^2}x^{4/3}+\cosh 2x.$$

$$\textbf{2)}\quad \varphi(x) = -e^{-x}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\sin(xt)\varphi(t)dt \qquad (۲\text{-}۳۰۹)$$

حل: معادله انتگرال (۲-۳۰۹) را با استفاده از انتگرال فاکس حل مي کنيم:

$$k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x \qquad (٢-٣١٠)$$

از رابطه (٢-٣١٠) تبديل ملين مي گيريم

$$K(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{s-1} \sin x dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \sin \frac{\pi}{2} s \qquad (٢-٣١١)$$

$$K(1-s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1-s) \cos \frac{\pi}{2} s \qquad (٢-٣١٢)$$

$$K(s)K(1-s) = \frac{4}{\pi} \Gamma(s)\Gamma(1-s) \sin \frac{\pi}{2} s \cos \frac{\pi}{2} s,$$

$$K(s)K(1-s) = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{\sin \pi s} . \sin \pi s = 2. \qquad (٢-٣١٣)$$

مقدار رابطه (٢-٣١٣) را در جواب انتگرال فاكس قرار مي دهيم

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{F(s) + K(s)F(1-s)}{1-2} x^{-s} ds,$$

$$\varphi(x) = e^{-x} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} K(s)F(1-s)x^{-s} ds \qquad (٢-٣١٤)$$

بنا به تعريف تبديل ملين ،

$$F(1-s) = \int_0^\infty f(t)t^{-s} ds \qquad (٢-٣١٥)$$

روابط (٢-٣١١) و (٢-٣١٥) را در (٢-٣١٤) قرار مي دهيم

$$\varphi(x) = e^{-x} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(t)dt \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \Gamma(s) \sin \frac{\pi}{2} s.(xt)^{-s} ds \right]$$

$$\varphi(x) = e^{-x} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} \sin xt dt \qquad (٢-٣١٦)$$

با استفاده از تبديل لاپلاس حاصل انتگرال برابر است با:

$$\varphi(x) = e^{-x} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{x^2+1}.$$

$$3) \quad p.v. \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)dt}{t-x} = \frac{x}{x^2+1} \qquad (٢-٣١٧)$$

حل: با استفاده از جواب معادله انتگرال هيلبرت داريم:

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{tdt}{(t^2+1)(x-t)} \qquad (٢-٣١٨)$$

انتگرال را بكمك قضيه مانده ها حساب مي كنيم كه يك قطب ساده در درون نيم دايره فوقاني دارد. مقدار مانده را در آن نقطه محاسبه مي كنيم و تابع $f(z)$ عبارت است از:

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(x-z)}$$

$$b_{-1} = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{z}{(z^2+1)(x-z)} = \frac{1}{2(x-i)} \qquad (٢-٣١٩)$$

$$\int_{-R}^{x-\varepsilon} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz + \int_{x+\varepsilon}^{R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i b_{-1} \qquad (٣٢٠\text{-}٢)$$

براي محاسبه انتگرال دوم تغيير متغير $x - z = \varepsilon e^{i\theta}$ را اعمال مي كنيم:

$$I_C = \int_{\pi}^{0} \frac{(x-\varepsilon e^{i\theta})(-i\varepsilon e^{i\theta})d\theta}{\left[(x-\varepsilon e^{i\theta})^2+1\right]\varepsilon e^{i\theta}} \qquad (٣٢١\text{-}٢)$$

وقتي $\varepsilon \to 0$ ، حاصل I_C برابراست با:

$$I_C = \frac{\pi i x}{x^2+1} \qquad (٣٢٢\text{-}٢)$$

انتگرال چهارم يعني I_R نيز وقتي $R \to +\infty$ ، برابر صفر است بنابراين

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tdt}{(t^2+1)(x-t)} = 2\pi i \frac{1}{2(x-i)} - \frac{\pi i x}{x^2+1} = \frac{\pi i(x+i)}{x^2+1} - \frac{\pi i x}{x^2+1},$$

در نتيجه

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{-\pi}{x^2+1}\right) = \frac{-1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}.$$

$$\textbf{4)}\quad p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{t-x} = \frac{\sin x}{x} \qquad (٣٢٣\text{-}٢)$$

حل: از انتگرال هيلبرت داريم:

$$f(s) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin tdt}{t(s-t)} \qquad (٣٢٤\text{-}٢)$$

در تابع $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(s-z)}$, $z=0$ و $z=s$ نقاط منفرد در مرز انتگرال گيري هستند بنابراين

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}dx}{x(s-x)} + \int_{C} \frac{e^{iz}dz}{z(s-z)} + \int_{\varepsilon}^{s-\varepsilon'} \frac{e^{ix}dx}{x(s-x)} + \int_{C'} \frac{e^{iz}dz}{z(s-z)} + \int_{s+\varepsilon'}^{R} \frac{e^{ix}dx}{x(s-x)} + \int_{C_R} \frac{e^{iz}dz}{z(s-z)} = 0 \qquad (٣٢٥\text{-}٢)$$

انتگرال هاي اول و سوم و پنجم وقتي $\varepsilon \to 0$ و $R \to +\infty$ ، برابر انتگرال روي محور x ها از $-\infty$ تا $+\infty$ است اما حاصل بقيه انتگرالها محاسبه مي كنيم.

با تغيير متغير $z = \varepsilon e^{i\theta}$ ، روي انتگرال c_ε داريم:

$$I_C = \int_{\pi}^{0} \frac{\exp(i\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}(s-\varepsilon e^{i\theta})} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{\varepsilon \to 0} I_C = -\frac{i\pi}{s} \qquad (٣٢٦\text{-}٢)$$

و با تغيير متغير $s - z = \varepsilon' e^{i\theta}$ ، روي انتگرال $c_{\varepsilon'}$ خواهيم داشت:

$$I_{C'} = \int_{\pi}^{0} \frac{\exp\left[i(s-\varepsilon' e^{i\theta})\right]}{\varepsilon' e^{i\theta}(s-\varepsilon' e^{i\theta})}\left(-i\varepsilon' e^{i\theta}\right)d\theta \xrightarrow{\varepsilon' \to 0} I_{C'} = \frac{i\pi e^{is}}{s} \qquad (٣٢٧\text{-}٢)$$

اكنون با تغيير متغير $s - z = \mathrm{Re}^{i\theta}$ ، انتگرال روي c_R را محاسبه مي كنيم

$$|I_R| \le \int_{C_R} \left|\frac{e^{iz}dz}{z(s-z)}\right| = \int_{0}^{\pi} \left|\frac{\exp(i\,\mathrm{Re}^{i\theta})}{\mathrm{Re}^{i\theta}(s-\mathrm{Re}^{i\theta})}\right| \left|i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\right| d\theta,$$

$$|I_R| \le \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{iR\cos\theta - R\sin\theta}\right|}{\left|s - \mathrm{Re}^{i\theta}\right|} d\theta \le \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{iR\cos\theta}\right|\left|e^{-R\sin\theta}\right|}{R-s} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{-R\sin\theta}\right|}{R-s} d\theta \qquad (٢\text{-}٣٢٨)$$

با توجه به نامساوي

$$\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta \Rightarrow -R\sin\theta \le \frac{-2R}{\pi}\theta \qquad (٢\text{-}٣٢٩)$$

نتيجه مي شود

$$|I_R| \le \frac{1}{R-s}\int_0^{\pi} \exp(-\frac{2R}{\pi}\theta)d\theta = \frac{1}{R-s}\frac{-\pi}{2R}\exp(-\frac{2R}{\pi}\theta)\Big|_0^{\pi}$$

$$|I_R| \le \frac{1}{R-s}\left[\frac{\pi}{2R} - \frac{\pi}{2R}e^{-R}\right] \Rightarrow \underset{R\to\infty}{|I_R|} \to 0. \qquad (٢\text{-}٣٣٠)$$

با جايگذاري حاصل انتگرالها در رابطه (٢-٣٢٥) داريم:

$$p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{x(s-x)} = \frac{i\pi}{s} - \frac{i\pi e^{is}}{s} = \frac{i\pi - i\pi\cos s + \pi\sin s}{s} \qquad (٢\text{-}٣٣١)$$

بنابراين

$$p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t dt}{t(s-t)} = \frac{\pi(1-\cos s)}{s} \qquad (٢\text{-}٣٣٢)$$

در نتيجه

$$f(s) = \frac{1-\cos s}{s}.$$

5) $$\varphi(x) = \cos x + \lambda\int_0^{\infty} \frac{x}{t} J_2(2\sqrt{xt})\varphi(t)dt. \qquad (٢\text{-}٣٣٣)$$

حل: از طرفين رابطه (٢-٣٣٣) نسبت به x تبديل لاپلاس مي گيريم

$$L\{\varphi(x)\} = L\{\cos x\} + \lambda L\left\{\int_0^{\infty} \frac{x}{t} J_2(2\sqrt{xt})\varphi(t)dt\right\} \qquad (٢\text{-}٣٣٤)$$

با به كار بردن قضيه لاپلاس در رابطه (٢-٣٣٤) داريم:

$$\Phi(s) = \frac{s}{s^2+1} + \lambda\frac{1}{s^3}\Phi(\frac{1}{s}) \qquad (٢\text{-}٣٣٥)$$

$$s \to \frac{1}{s} \Rightarrow \Phi(\frac{1}{s}) = \frac{s}{s^2+1} + \lambda s^3\Phi(s) \qquad (٢\text{-}٣٣٦)$$

با جايگذاري رابطه (٢-٣٣٦) در (٢-٣٣٥) تابع $\Phi(s)$ بدست مي آيد

$$\Phi(s) = \frac{s}{s^2+1} + \lambda\frac{1}{s^3}\left[\frac{s}{s^2+1} + \lambda s^3\Phi(s)\right],$$

$$\Phi(s) = \frac{s}{s^2+1} + \lambda\frac{1}{s^2(s^2+1)} + \lambda^2\Phi(s),$$

$$(1-\lambda^2)\Phi(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{\lambda}{s^2(s^2+1)},$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left\{\frac{s}{s^2+1} + \lambda\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)\right\} \qquad (٢\text{-}٣٣٧)$$

با گرفتن معكوس تبديل لاپلاس از رابطه (٢-٣٣٧) , جواب معادله نتيجه مي شود

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}[\cos x + \lambda(x - \sin x)].$$

$$6)\quad \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty \exp(-\frac{t^2}{4x})\varphi(t)dt = 2x - \sinh x. \qquad (٢-٣٣٨)$$

حل: از طرفين تبديل لاپلاس مي گيريم و با استفاده از قضيه افراز داريم:

$$\frac{\Phi(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s^2-1} \qquad (٢-٣٣٩)$$

$$\sqrt{s} \to s \Rightarrow \frac{\Phi(s)}{s} = \frac{2}{s^4} - \frac{1}{s^4-1} \Rightarrow \Phi(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{s}{s^4-1} \qquad (٢-٣٤٠)$$

از طرفين رابطه (٢-٣٤٠) معكوس تبديل لاپلاس مي گيريم

$$\varphi(x) = x^2 - L^{-1}\left\{\frac{1/4}{s-1} + \frac{1/4}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}\right\},$$

$$\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x,$$

$$\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \cos x\right]$$

$$\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{2}[\cosh x - \cos x].$$

$$7)\quad \int_0^x (x^2 - t^2)\varphi(t)dt = \frac{x^3}{3}. \qquad (٢-٣٤١)$$

با قرار دادن $x^2 - t^2 = (x-t)^2 + 2t(x-t)$ در معادله انتگرال (٢-٣٤١) داريم:

$$\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt + 2\int_0^x (x-t)(t\varphi(t))dt = \frac{x^3}{3} \qquad (٢-٣٤٢)$$

با استفاده از تبديل لاپلاس تابع كانولوشن از رابطه (٢-٣٤٢) ، مي توان نوشت:

$$L\{x^2\}.L\{\varphi(x)\} + 2L\{x\}.L\{x\varphi(x)\} = L\left\{\frac{x^3}{3}\right\},$$

$$\frac{2}{s^3}\Phi(s) + 2\frac{1}{s^2}(-\Phi'(s)) = \frac{3!}{3s^4},$$

بنابراين پس از ساده كردن به معادله ديفرانسيل مرتبه اول زير تبديل مي شود

$$\Phi'(s) - \frac{1}{s}\Phi(s) = -\frac{1}{s^2} \qquad (٢-٣٤٣)$$

با توجه به روش حل معادله ديفرانسيل مرتبه اول داريم

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\Phi(s)\right) = -\frac{1}{s^3} \qquad (٢-٣٤٤)$$

اگر از طرفين معادله (٢-٣٤٤) نسبت به s انتگرال بگيريم، خواهيم داشت:

$$\frac{1}{s}\Phi(s) = \frac{1}{2s^2} + c \qquad (٢-٣٤٥)$$

براي پيدا كردن مقدار ثابت c از طرفين (٢-٣٤٢) نسبت به x مشتق مي گيريم و با به كار بردن قاعده لايب نيتز داريم:

$$2x\int_0^x \varphi(t)dt = x^2 \Rightarrow \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{x}{2} \qquad (٢\text{-}٣٤٦)$$

مشتق رابطه (٢-٣٤٦) با استفاده از قضيه اساسي حساب ديفرانسيل به صورت زير در مي آيد

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow L\{\varphi(x)\} = L\left\{\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow \Phi(s) = \frac{1}{2s} \qquad (٢\text{-}٣٤٧)$$

با قرار دادن رابطه (٢-٣٤٧) در (٢-٣٤٥) نتيجه مي شود، $c = 0$ ، بنابراين

$$\Phi(s) = \frac{1}{2s} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2}.$$

فصل٣
حل مسائل مقادير مرزي آميخته و معادلات انتگرال دوگانه

مثال ١. مساله با مقدار مرزي آميخته با معادلات انتگرال زير را حل كنيد

$\Delta\Phi \equiv 0, \quad x, y > 0$ ، Φ تابع همساز و كراندار

$$1)\Phi_x(0,y) = 0, \quad 2)\Phi_y(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad 3)\Phi(x,0) = f(x), \quad x > 1. \qquad (٣\text{-}١)$$

حل:

$$\Phi(x,y) = \left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)\left(C(\lambda)e^{-\lambda y} + D(\lambda)e^{\lambda y}\right) \qquad (٣\text{-}٢)$$

از كراندار بودن تابع Φ ، نتيجه مي شود:

$$D(\lambda) = 0,$$

$$\Phi_x(0,y) = 0 \Rightarrow \left(-\lambda A(\lambda)\sin\lambda x + \lambda B(\lambda)\cos\lambda x\right)C(\lambda)e^{-\lambda y}\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow B(\lambda) = 0,$$

لذا تابع $\Phi(x,y)$ به صورت زير در مي آيد

$$\Phi(x,y) = A_0(\lambda)\cos(\lambda x)e^{-\lambda y} \qquad (٣\text{-}٣)$$

طبق اصل برهمنهي جوابها رابطه (٣-٣) را مي توان به صورت زير نوشت:

$$\Phi(x,y) = \int_0^\infty A_0(\lambda)\cos(\lambda x)e^{-\lambda y}d\lambda \qquad (٣\text{-}٤)$$

از شرط هاي (٢) و (٣) نتيجه مي شود:

$$\begin{cases} \int_0^\infty \lambda A_0(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda = 0, & 0 < x < 1 \\ \int_0^\infty A_0(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda = f(x), & x > 1 \end{cases} \qquad (٣\text{-}٥)$$

يا

$$\int_0^\infty \lambda A_0(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda = \lambda f(x) = g(x), \qquad 1 < x < \infty \qquad (٣\text{-}٦)$$

$$\int_0^\infty \lambda A_0(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda = 0, \qquad 0 < x < 1 \qquad (٣\text{-}٧)$$

بااستفاده از معكوس تبديل كسينوسي فوريه در رابطه (٣-٦) داريم

$$\lambda A_0(\lambda) = \int_1^\infty g(x)\cos(\lambda x)dx \qquad (٣\text{-}٨)$$

با استفاده از تبدیل هنکل[1] روابط زیر را داریم:

$$\cos\lambda x = \lambda\int_x^\infty \frac{uJ_0(u\lambda)du}{\sqrt{u^2-x^2}}, \qquad 0<x<u, \tag{۳-۹}$$

$$\sin\lambda x = \lambda\int_0^x \frac{uJ_0(u\lambda)du}{\sqrt{x^2-u^2}}, \qquad 0<u<x \tag{۳-۱۰}$$

$$\int_0^\infty \cos(xu)J_0(ut)du = \frac{H(t-x)}{\sqrt{t^2-x^2}} \tag{۳-۱۱}$$

$$\int_0^\infty \sin(xu)J_0(ut)du = \frac{H(x-t)}{\sqrt{x^2-t^2}} \tag{۳-۱۲}$$

با جایگذاري رابطه (۳-۹) در معادله (۳-۸) خواهیم داشت:

$$\lambda A_0(\lambda) = \int_1^\infty g(x)\left(\lambda\int_x^\infty \frac{uJ_0(u\lambda)du}{\sqrt{u^2-x^2}}\right)dx\,, \qquad u>x,$$

یا

$$A_0(\lambda) = \int_1^\infty g(x)\left(\int_x^\infty \frac{uJ_0(u\lambda)du}{\sqrt{u^2-x^2}}\right)dx \tag{۳-۱۳}$$

با تعویض ترتیب انتگرال گیري در رابطه (۳-۱۳) داریم:

$$A_0(\lambda) = \int_1^\infty J_0(u\lambda)du\left(\int_1^u \frac{ug(x)dx}{\sqrt{u^2-x^2}}\right) \tag{۳-۱۴}$$

با انتخاب ،

$$h(u) = \int_1^u \frac{ug(x)dx}{\sqrt{u^2-x^2}} \tag{۳-۱۵}$$

رابطه (۳-۱٤) به صورت زیر در مي آید

$$A_0(\lambda) = \int_1^\infty h(u)J_0(u\lambda)du \tag{۳-۱٦}$$

از شرط مرزي سوم داریم:

$$\int_0^\infty A_0(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda = f(x) \tag{۳-۱۷}$$

از طرفین رابطه (۳-۱۷) نسبت به x مشتق مي گیریم

$$\int_0^\infty \lambda A_0(\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda = -f'(x),$$

یا

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty A_0(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda = f'(x) \tag{۳-۱۸}$$

با قرار دادن رابطه (۳-۱٦) در (۳-۱۸) نتیجه مي شود

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_0^\infty\left(\int_1^\infty h(u)J_0(u\lambda)du\right)\cos(\lambda x)d\lambda\right\} = f'(x)\,,$$

با تعویض ترتیب انتگرال گیري داریم:

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_1^\infty h(u)du\int_0^\infty J_0(u\lambda)\cos(x\lambda)d\lambda\right\}=f'(x) \qquad (١٩\text{-}٣)$$

با توجه به رابطه (٣-١١) مي توان رابطه (٣-١٩) را به صورت زير نوشت

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_x^\infty \frac{h(u)du}{\sqrt{u^2-x^2}}\right\}=f'(x), \qquad u>x \qquad (٢٠\text{-}٣)$$

با انتگرال گيري از طرفين رابطه (٣-٢٠) به معادله انتگرال آبل تبديل مي شود

$$\int_x^\infty \frac{h(u)du}{\sqrt{u^2-x^2}}=f(x) \qquad (٢١\text{-}٣)$$

با استفاده از جواب معادله انتگرال آبل داريم

$$h(u)=-\frac{2u}{\pi}\int_u^\infty \frac{f'(x)dx}{\sqrt{u^2-x^2}} \qquad (٢٢\text{-}٣)$$

$$A_0(\lambda)=\int_1^\infty h(u)J_0(u\lambda)du \qquad (٢٣\text{-}٣)$$

$$\Phi(x,y)=\int_0^\infty A_0(\lambda)e^{-\lambda y}\cos(x\lambda)d\lambda \qquad (٢٤\text{-}٣)$$

با حل سه انتگرال فوق به ترتيب تابع $\Phi(x,y)$ بدست مي آيد.

مثال٢. معادلات انتگرال زير را حل كنيد

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty f(\rho)J_0(r\rho)d\rho=0, & 0<r<1\\ \displaystyle\int_0^\infty \rho f(\rho)J_0(r\rho)d\rho=h(r), & r>1\end{cases} \qquad (٢٥\text{-}٣)$$

حل: تابع $f(\rho)$ را به صورت زير در نظر مي گيريم:

$$f(\rho)=\int_1^\infty \varphi(t)\cos(t\rho)dt \qquad (٢٦\text{-}٣)$$

نشان مي دهيم تابع $f(\rho)$ در معادله اول دستگاه (٣-٢٥) صدق مي كند

$$\int_0^\infty\left(\int_1^\infty \varphi(t)\cos(t\rho)dt\right)J_0(r\rho)d\rho=\int_0^\infty \varphi(t)dt\int_1^\infty J_0(r\rho)\cos(t\rho)d\rho$$

$$=\int_0^\infty \frac{H(r-t)}{\sqrt{r^2-t^2}}\varphi(t)dt=0, \qquad t>1>r.$$

حالا تابع $f(\rho)$ را در معادله دوم دستگاه (٣-٢٥) قرار مي دهيم

$$\int_0^\infty \rho\left(\int_1^\infty \varphi(t)\cos(t\rho)dt\right)J_0(r\rho)d\rho=h(r),$$

يا

$$\int_1^\infty \varphi(t)dt\int_0^\infty \rho\cos(t\rho)J_0(r\rho)d\rho=h(r), \qquad r>1 \qquad (٢٧\text{-}٣)$$

از طرفي با توجه به روابط هنكل داريم:

$$\int_0^\infty \sin(t\rho)J_0(r\rho)d\rho = \begin{cases} 0, & 0<r<t \\ \dfrac{H(r-t)}{\sqrt{r^2-t^2}}, & r>t \end{cases} \qquad (٣-٢٨)$$

از طرفين رابطه (٣-٢٨) نسبت به t مشتق مي گيريم

$$\int_0^\infty \rho\cos(t\rho)J_0(r\rho)d\rho = \frac{t}{(r^2-t^2)^{3/2}}, \quad t<r \qquad (٣-٢٩)$$

رابطه (٣-٢٩) را در رابطه (٣-٢٧) قرار مي دهيم

$$\int_0^\infty \frac{t\varphi(t)dt}{(r^2-t^2)^{3/2}} = h(r) \qquad (٣-٣٠)$$

بنابراين

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{rh(r)dr}{\sqrt{r^2-t^2}} \qquad (٣-٣٠)$$

با جايگزين كردن رابطه (٣-٣٠) در معادله (٣-٢٦) تابع $f(\rho)$ معين مي شود

$$f(\rho) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty\left(\int_0^\infty \frac{rh(r)dr}{\sqrt{r^2-t^2}}\right)\cos(t\rho)dt.$$

مثال٣. معادلات انتگرال زير را حل كنيد

$$\begin{cases} \int_0^\infty f(\rho)J_0(r\rho)d\rho = g(r), & 0<r<1 \\ \int_0^\infty \rho f(\rho)J_0(r\rho)d\rho = 0, & 1<r<\infty \end{cases} \qquad (٣-٣١)$$

حل: انتگرال زير را در نظر مي گيريم:

$$\frac{H(t-r)}{\sqrt{t^2-r^2}} = \int_0^\infty \sin(t\rho)J_0(r\rho)d\rho = 0, \quad t<r \qquad (٣-٣٢)$$

بنابراين مشتق رابطه (٣-٣٢) نسبت به t برابر صفر است يعني

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty \sin(t\rho)J_0(r\rho)d\rho = \int_0^\infty \rho\cos(t\rho)J_0(r\rho)d\rho = 0 \qquad (٣-٣٣)$$

از مقايسه معادله دوم دستگاه با رابطه (٣-٣٣) نتيجه مي شود:

$$f(\rho) = \cos(t\rho), \quad t<r \qquad (٣-٣٤)$$

ثابت مي كنيم تابع زير

$$f(\rho) = \int_0^1 \varphi(t)\cos(t\rho)dt, \quad 0<t<1 \qquad (٣-٣٤)$$

جواب ديگري براي معادله دوم دستگاه است

$$\int_0^\infty \rho J_0(r\rho)d\rho\int_0^1 \varphi(t)\cos(t\rho)dt = \int_0^1 \varphi(t)dt\int_0^\infty \rho\cos(t\rho)J_0(r\rho)d\rho \qquad (٣-٣٥)$$

بنا به رابطه (٣-٣٣) حاصل رابطه (٣-٣٥) نيز برابر صفر است. بنابراين بايستي $\varphi(t)$ را طوري تعيين نماييم كه تابع $f(\rho) = \int_0^1 \varphi(t)\cos(t\rho)dt$ در معادله اول دستگاه نيز صدق كند.

$$\int_0^\infty f(\rho)J_0(t\rho)d\rho = g(r), \quad 0<r<1 \qquad (٣٦-٣)$$

تابع $f(\rho)$ را در معادله (٣-٣٦) قرار مي دهيم

$$\int_0^\infty \left(\int_0^1 \varphi(t)\cos(t\rho)dt \right) J_0(r\rho)d\rho = g(r), \quad 0<r<1$$

يا

$$\int_0^1 \varphi(t)dt \int_0^\infty \cos(t\rho)J_0(r\rho)d\rho = g(r), \quad 0<r<1 \qquad (٣٧-٣)$$

كه با استفاده از رابطه تبديل هنكل در (٣-٣٧) داريم:

$$\int_0^1 \frac{H(r-t)\varphi(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = g(r), \quad 0<t<r<1 \qquad (٣٨-٣)$$

$$\int_0^r \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = g(r) \qquad (٣٩-٣)$$

كه جواب آن با مقايسه جواب معادله انتگرال منفرد (٢-١٠١) برابر است با:

$$\varphi(t) = \frac{2\sin(\pi/2)}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{rf(r)dr}{(t^2-r^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{rf(r)dr}{\sqrt{t^2-r^2}} \qquad (٤٠-٣)$$

با استفاده از انتگرال جز به جز در رابطه (٣-٤٠) داريم:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\left\{ g(0) + t\int_0^t \frac{g'(\tau)d\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}} \right\} \qquad (٤١-٣)$$

با جايگزيني رابطه (٣-٤١) در رابطه (٣-٣٤) تابع $f(\rho)$ بدست مي آيد

$$f(\rho) = \frac{2}{\pi\rho}g(0)\sin\rho + \frac{2}{\pi}\int_0^1 t\cos(t\rho)\left(\int_0^t \frac{g'(\tau)}{\sqrt{t^2-\tau^2}}d\tau \right)dt \qquad (٤٢-٣)$$

مثال٤. (مسئله اسندون) مطلوبست مساله مقدار مرزي آميخته زير:

$\Delta\Phi \equiv 0, \quad x,y>0$, تابع همساز و كراندار Φ

1) $\Phi_x(0,y)=0$ 2) $\Phi_y(x,0)=f(x), \quad 0<x<1$ 3) $\Phi(x,0)=0, \quad x>1$

حل: با توجه به همساز و كراندار بودن تابع Φ و شرط اول داريم:

$$\Phi(x,y) = \int_0^\infty \Psi(\zeta)e^{-y\zeta}\cos(x\zeta)d\zeta \qquad (٤٥-٣)$$

با اعمال شرايط مرزي دوم وسوم در تابع $\Phi(x,y)$ داريم:

$$\int_0^\infty \zeta\Psi(\zeta)\cos(x\zeta)d\zeta = -f(x), \quad 0<x<1 \qquad (٤٦-٣)$$

$$\int_0^\infty \Psi(\zeta)\cos(x\zeta)d\zeta = 0, \quad x>1 \qquad (٤٧-٣)$$

$$\int_0^\infty \Psi(\zeta)\cos(x\zeta)d\zeta = k(x), \quad 0<x<1 \qquad (٤٨-٣)$$

با استفاده از معكوس تبديل كسينوسي فوريه در رابطه (٣-٤٨) نتيجه مي شود

$$\Psi(\zeta)=\int_0^1 k(x)\cos(x\zeta)dx \qquad (۳\text{-}۴۹)$$

از رابطه (۳-۴۸) نسبت به x مشتق مي گيريم:

$$\int_0^\infty \zeta\Psi(\zeta)\sin(x\zeta)d\zeta=-k'(x)=h(x), \quad 0<x<1 \qquad (۳\text{-}۵۰)$$

از معادله (۳-۵۰) معكوس تبديل سينوسي فوريه مي گيريم:

$$A(\zeta)=\zeta\Psi(\zeta)=\int_0^1 h(x)\sin(x\zeta)dx \qquad (۳\text{-}۵۱)$$

با استفاده از تبديل هنكل،

$$\sin(x\zeta)=\zeta\int_0^x \frac{uJ_0(u\zeta)du}{\sqrt{x^2-\zeta^2}} \qquad (۳\text{-}۵۲)$$

در رابطه (۳-۵۱) نتيجه مي گيريم

$$\Psi(\zeta)=\int_0^1 h(x)\left(\int_0^x \frac{uJ_0(u\zeta)du}{\sqrt{x^2-\zeta^2}}\right)dx \qquad (۳\text{-}۵۳)$$

با تعويض ترتيب انتگرال گيري در رابطه فوق داريم:

$$\begin{cases}\Psi(\zeta)=\displaystyle\int_0^1 J_0(u\zeta)g(u)du\\ g(u)=\displaystyle\int_u^1 \frac{uh(x)dx}{\sqrt{x^2-u^2}}\end{cases} \qquad (۳\text{-}۵۴)$$

رابطه (۳-۴۶) را مي توان به صورت زير نوشت:

$$-f(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty \Psi(\zeta)\sin(x\zeta)d\zeta\right]=\frac{d}{dx}\left[\int_0^1 g(u)du\int_0^\infty J_0(u\zeta)\sin(x\zeta)d\zeta\right], \quad x>u>0$$

$$-f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{g(u)du}{\sqrt{x^2-u^2}} \Rightarrow g(u)=\frac{-2u}{\pi}\int_0^u \frac{f(x)dx}{\sqrt{u^2-x^2}}.$$

مثال۵. معادله انتگرال دوگان زير را حل كنيد

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty f(t)\cos xt dt=\frac{1}{x^2+1}, & 0<x<1\\ \displaystyle\int_0^\infty f(t)\sin xt dt=\frac{x}{x^2+1}, & 1<x<\infty\end{cases} \qquad (۳\text{-}۵۵)$$

حل: هر يك از معادلات دستگاه (۳-۵۵) را به صورت زيرمي نويسيم:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty f_1(t)\cos xt dt=\frac{1}{x^2+1}, & 0<x<1\\ \displaystyle\int_0^\infty f_1(t)\sin xt dt=0, & x>1\end{cases} \qquad (۳\text{-}۵۶)$$

و

$$\begin{cases} \int_0^\infty f_2(t)\cos xt dt = 0, & 0<x<1 \\ \int_0^\infty f_2(t)\sin xt dt = \dfrac{x}{x^2+1}, & x>1 \end{cases} \tag{۳-۵۷}$$

که در آنها $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$. از معادله (۳-۵۶) نتیجه مي گيريم:

$$f_1(t)=\int_0^1 g(x)\sin xt dt, \tag{۳-۵۸}$$

و

$$\sin xt = t\int_0^x \frac{uJ_0(ut)du}{\sqrt{x^2-u^2}} \tag{۳-۵۹}$$

$$f_1(t)=\int_0^1 g(x)dx\left(t\int_0^x \frac{uJ_0(ut)du}{\sqrt{x^2-u^2}}\right) \tag{۳-۶۰}$$

با تعويض ترتيب انتگرال گيري خواهيم داشت

$$f_1(t)=t\int_0^1 J_0(ut)\left(\int_u^1 \frac{ug(x)dx}{\sqrt{x^2-u^2}}\right)du = t\int_0^1 J_0(ut)h(u)du \tag{۳-۶۱}$$

از معادله اول دستگاه (۳-۵۶) داريم:

$$\int_0^\infty f_1(t)\cos xt dt = \frac{1}{x^2+1},$$

يا

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{d}{dx}\int_0^\infty t^{-1}\sin xt f_1(t)dt \tag{۳-۶۲}$$

از روابط (۳-۶۱) و (۳-۶۲) نتيجه مي گيريم

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 h(u)du\int_0^\infty J_0(ut)\sin xt dt\right) \tag{۳-۶۳}$$

با استفاده از رابطه

$$\int_0^\infty J_0(ut)\sin xt dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-u^2}}, & x>u \\ 0, & x<u \end{cases}$$

مي توان نوشت

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{h(u)du}{\sqrt{x^2-u^2}}\right) \tag{۳-۶۴}$$

از طرفين رابطه (۳-۶۴) نسبت به x انتگرال مي گيريم

$$\arctan x = \int_0^x \frac{h(u)du}{\sqrt{x^2-u^2}} + c$$

$$x=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \arctan x = \int_0^x \frac{h(u)du}{\sqrt{x^2-u^2}} \tag{۳-۶۵}$$

با استفاده از معادله انتگرال آبل داريم:

$$h(x)=\frac{2x}{\pi}\int_0^x \frac{\arctan u}{\sqrt{x^2-u^2}}du \qquad (۳\text{-}۶۶)$$

و

$$\frac{h(u)}{u}=\int_u^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x^2-u^2}}du \Rightarrow g(x)=\frac{-2x}{\pi}\int_x^1 \frac{h(u)/u}{\sqrt{u^2-x^2}}. \qquad (۳\text{-}۶۷)$$

تابع $f_2(t)$ را به صورت زیر انتخاب مي كنيم:

$$f_2(t)=\int_1^\infty g(x)\cos xtdx \qquad (۳\text{-}۶۸)$$

كه در آن

$$\cos xt = t\int_x^\infty \frac{uJ_0(ut)du}{\sqrt{u^2-x^2}}.$$

نشان مي دهيم تابع $f_2(t)$ در معادله اول دستگاه (۳-۵۷) صدق مي كند

$$\int_0^\infty\left(\int_1^\infty g(x')\cos x'tdx'\right)\cos xtdt=\int_1^\infty g(x')dx'\int_0^\infty \cos x't.\cos xtdt$$

$$=\int_1^\infty g(x')dx'\int_0^\infty \frac{1}{2}[\cos(x'+x)t+\cos(x'-x)t]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^\infty g(x')dx'\int_0^\infty(\cos\alpha t+\cos\beta t)dt=0 \qquad (۳\text{-}۶۹)$$

كه در آن

$$\int_0^\infty \cos\alpha tdt=\lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-st}\cos\alpha tdt=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s^2+1}=0$$

بنابراين تابع $f_2(t)$ در معادله اول دستگاه (۳-۵۷) صدق مي كند. حالا آن را در معادله دوم دستگاه قرار ميدهيم

$$f_2(t)=\int_1^\infty g(x)\cos xtdx=\int_1^\infty g(x)dx\left(t\int_0^\infty \frac{uJ_0(ut)du}{\sqrt{u^2-x^2}}\right)$$

$$=t\int_1^\infty J_0(ut)du\left(\int_0^\infty \frac{ug(x)dx}{\sqrt{u^2-x^2}}\right)$$

$$=t\int_1^\infty J_0(ut)h(u)du \qquad (۳\text{-}۷۰)$$

كه در آن

$$h(u)=\int_0^\infty \frac{ug(x)dx}{\sqrt{u^2-x^2}} \qquad (۳\text{-}۷۱)$$

با قرار دادن رابطه (۳-۷۰) در معادله دوم دستگاه (۳-۵۷) داريم:

$$\frac{x}{x^2+1}=-\frac{d}{dx}\left(\int_0^\infty t^{-1}\cos(xt)f_2(t)dt\right)=-\frac{d}{dx}\left(\int_1^\infty h(u)du\int_0^\infty J_0(ut)\cos(xt)dt\right),$$

يا

$$\frac{x}{x^2+1} = -\frac{d}{dx}\int_x^\infty \frac{h(u)du}{\sqrt{u^2-x^2}} \qquad (۳\text{-}۷۲)$$

از طرفين رابطه (۳-۷۲) نسبت به x فاكتور مي گيريم:

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = -\int_x^\infty \frac{h(u)du}{\sqrt{u^2-x^2}} + c \qquad (۳\text{-}۷۳)$$

$$x=0 \Rightarrow c = \int_0^\infty \frac{h(u)}{u}du \Rightarrow c - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \int_x^\infty \frac{h(u)du}{\sqrt{u^2-x^2}} \qquad (۳\text{-}۷٤)$$

با محاسبه انتگرالهاي زير تابع $f_2(t)$ بدست مي آيد:

$$h(u) = \frac{2u}{\pi}\int_u^\infty \frac{c-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}{\sqrt{u^2-x^2}}dx,$$

و

$$g(x) = \frac{2x}{\pi}\int_1^x \frac{h(u)/u}{\sqrt{x^2-u^2}}du,$$

و

$$f_2(t) = t\int_1^\infty g(x)\cos(xt)dx.$$

فصل ٤

حل عددي معادلات انتگرال

معادله انتگرال فردهولم نوع دوم

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (٤\text{-}۱)$$

داراي جوابي به صورت زير مي باشد

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt \qquad (٤\text{-}۲)$$

كه در آن $R(x,t,\lambda)$ را هسته حلال مي ناميم كه از روابط زير قابل محاسبه است

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)} \qquad (٤\text{-}۳)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}C_n\lambda^n \qquad (٤\text{-}٤)$$

$$D(x,t,\lambda) = B_0 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}B_n\lambda^n \qquad (٤\text{-}٥)$$

كه در آنها نيز

$$B_0 = K(x,t),$$

$$B_n=\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,t) & K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n)\\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n)\\ \vdots & \dots & \dots & \vdots\\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \dots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1dt_2\dots dt_n \qquad (٤-٦)$$

و

$$C_n=\int_a^b\cdots\int_a^b \det[k(t_i,t_j)]dt_1\dots dt_n,\quad i=1,2,\dots,n\ ,\quad j=1,2,\dots n \qquad (٤-٧)$$

مثال۱. هسته حلال $R(x,t,\lambda)$ را براي حالتي كه $a=0,b=1$ و $K(x,t)=xe^t$ ، بدست آوريد.

حل: با توجه به روابط بالا داريم:

$$B_0=K(x,t)=xe^t$$

و

$$B_1=\int_0^1\begin{vmatrix}xe^t & xe^{t_1}\\ t_1e^t & t_1e^{t_1}\end{vmatrix}dt_1=0\,,$$

$$B_2=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2}\\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2}\\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2}\end{vmatrix}dt_1dt_2=0\Rightarrow B_3=B_4=\dots=0$$

و

$$C_1=\int_0^1 t_1e^{t_1}dt_1=1,$$

$$C_2=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2}\\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2}\end{vmatrix}dt_1dt_2=0\Rightarrow C_3=C_4=\dots=0$$

در نتيجه هسته حلال به صورت زير بدست مي آيد

$$D(\lambda)=1-\lambda,\qquad D(x,t,\lambda)=xe^t,$$

$$R(x,t,\lambda)=\frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)}=\frac{xe^t}{1-\lambda}.$$

مثال۲. معادله انتگرال فردهولم نوع دوم زير را حل كنيد

$$\varphi(x)=e^{-x}+\lambda\int_0^1 xe^t\varphi(t)dt \qquad (٤-٨)$$

حل: با جايگذاري هسته حلال مثال۱ در رابطه (٤-٢) داريم:

$$\varphi(x)=e^{-x}+\lambda\int_0^1\frac{xe^t}{1-\lambda}e^{-t}dt=e^{-x}+\frac{\lambda}{1-\lambda}x.$$

روابط بازگشتي براي پيدا كردن هسته حلال معادله انتگرال فردهولم نوع دوم

$$\begin{cases}C_0=1\\ C_n=\int_a^b B_{n-1}(s,s)ds\end{cases} \qquad (٤-٩)$$

و

$$\begin{cases} B_0(x,t) = K(x,t) \\ B_n(x,t) = C_n K(x,t) - n\int_a^b K(x,s)B_{n-1}(s,t)ds \end{cases} \qquad (۱۰-٤)$$

مثال۳. با استفاده از روابط بازگشتي هسته حلال را براي $K(x,t) = x - 2t$ در معادله انتگرال زير بدست آوريد

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^1 (x-2t)\varphi(t)dt, \quad 0 \le x,t \le 1 \qquad (۱۱-٤)$$

حل: با توجه به روابط بازگشتي داريم:

$$C_0 = 1, \quad B_0(x,t) = K(x,t) = x - 2t,$$

$$C_1 = \int_0^1 B_0(s,s)ds = \int_0^1 (s-2s)ds = -\frac{1}{2},$$

$$B_1(x,t) = -\frac{1}{2}(x-2t) - 1\int_0^1 (x-2s)(s-2t)ds = -(x+t) + 2xt + \frac{2}{3},$$

$$C_2 = \int_0^1 B_1(s,s)ds = \int_0^1 (-2s + s^2 + \frac{2}{3})ds = \frac{1}{3},$$

با ادامه اين روند نتيجه مي گيريم:

$$B_2(x,t) = 0 \Rightarrow C_3 = B_3 = \ldots = 0$$

بنابراين

$$D(x,t,\lambda) = (x-2t) + (-1)(-x - t + 2xt + \frac{2}{3})\lambda$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n = 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}$$

و

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{x - 2t + \left(x + t - 2xt - (2/3)\right)\lambda}{1 + (\lambda/2) + (\lambda^2/6)}.$$

مثال٤. معادله انتگرال زير را يکبار با روش مستقيم و يکبار با روش بازگشتي حل کرده وجواب را مقايسه کنيد

$$\varphi(x) = e^x - \int_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt \qquad (۱۲-٤)$$

حل: روش مستقيم:

$$\varphi(x) = e^x - e^x\int_0^1 e^{-t}\varphi(t)dt \qquad (۱۳-٤)$$

با انتخاب $\alpha = \int_0^1 e^{-t}\varphi(t)dt$ ، داريم:

$$\varphi(x) = e^x - e^x\alpha = (1-\alpha)e^x \Rightarrow \varphi(t) = (1-\alpha)e^t$$

بنابراين

$$\alpha = \int_0^1 e^{-t}(1-\alpha)e^t dt \Rightarrow \alpha = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

در نتيجه

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{x}.$$

روش بازگشتي:

$$C_0=1,\quad B_0(x,t)=e^{x-t}\Rightarrow C_1=\int_0^1 e^{s-s}ds=1,$$

$$B_1(x,t)=e^{x-t}-\int_0^1 e^{x-s}e^{s-t}ds=e^{x-t}-e^{x-t}=0$$

$$C_2=C_3=...=0,\qquad B_2=B_3=...=0$$

$$D(x,t,\lambda)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n\lambda^n=e^{x-t}.$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_n\lambda^n=1-\lambda$$

بنابراين هسته حلال $R(x,t,\lambda)$ برابر است با:

$$R(x,t,\lambda)=\frac{e^{x-t}}{1-\lambda}=\frac{e^{x-t}}{2},\quad \lambda=-1$$

$$\varphi(x)=e^{x}-\int_0^1\frac{e^{x-t}}{2}.e^{t}dt=e^{x}-\frac{1}{2}e^{x}=\frac{1}{2}e^{x}.$$

مثال۳. هسته حلال را براي $K(x,t)=\sin(x+t)$ و $0\le x,t\le 2\pi$ پيدا كنيد

حل: با استفاده از روابط بازگشتي داريم:

$$C_0=1,\quad B_0=K(x,t)=\sin(x+t),$$

$$C_1=\int_0^{2\pi}B_0(s,s)ds=\int_0^{2\pi}\sin(2s)ds=-\frac{1}{2}\cos(2s)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$B_1=C_1.K(x,t)-\int_0^{2\pi}K(x,s).B_0(s,t)ds=0.\sin(x+t)-\int_0^{2\pi}\sin(x+s)\sin(s+t)ds$$

$$B_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(x-t)-\cos(2s+x+t)]ds=\pi\cos(x-t),$$

$$C_2=\int_0^{2\pi}\pi\cos(s-s)ds=2\pi^2,$$

$$B_2=2\pi^2\sin(x+t)-2\int_0^{2\pi}\sin(x+s)(\pi\cos(s-t))ds,$$

$$=2\pi^2\sin(x+t)-2\pi\int_0^{2\pi}\sin(x+s)\cos(s-t)ds$$

$$=2\pi^2\sin(x+t)-2\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\sin(x+2s-t)+\sin(x+t)]ds$$

$$=2\pi^2\sin(x+t)-\pi\left[-\frac{1}{2}(\cos(x+2s-t))+\sin(x+t)\right]_0^{2\pi}$$

$$B_2 = 2\pi^2 \sin(x+t) - 2\pi^2 \sin(x+t) = 0$$

در نتيجه

$$C_3 = C_4 = ... = 0, \qquad B_3 = B_4 = ... = 0$$

$$D(x,t,\lambda) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n \lambda^2 = \sin(x+t) - \pi\lambda\cos(x-t).$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n = 1 + \frac{1}{2}.2\pi^2\lambda^2 = 1 + \pi^2\lambda^2.$$

و هسته حلال به صورت زير بدست مي آيد

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\sin(x+t) - \lambda\pi\cos(x-t)}{1+\pi^2\lambda^2}.$$

روش تكراري براي محاسبه هسته حلال $R(x,t,\lambda)$

معادله انتگرال فردهولم نوع دوم

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (۱۴-۴)$$

داراي جوابي به صورت زير مي باشد

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\lambda^n. \qquad (۱۵-۴)$$

در حاليكه $\psi_n(x)$ از روابط زير قابل محاسبه مي باشند

$$\psi_1(x) = \int_a^b K_1(x,t)f(t)dt,$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K_1(x,t)\psi_1(t)dt = \int_a^b K_2(x,t)f(t)dt,$$

$$\psi_3(x) = \int_a^b K_1(x,t)\psi_2(t)dt = \int_a^b K_3(x,t)f(t)dt,$$

$$\vdots$$

$$\psi_n(x) = \int_a^b K_1(x,t)\psi_{n-1}(t)dt = \int_a^b K_n(x,t)f(t)dt. \qquad (۱۶-۴)$$

كه در آنها $K_n(x,t)$ عبارتند از:

$$K_1(x,t) = K(x,t),$$

$$K_2(x,t) = \int_a^b K_1(x,z)K_1(z,t)dz,$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b K_1(x,z)K_2(z,t)dz,$$

$$\vdots$$

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_1(x,z)K_{n-1}(z,t)dz. \qquad (۱۷-۴)$$

كه از روابط بالا نتيجه مي گيريم براي اعداد طبيعي m,n كه $n > m > 0$ داريم:

$$K_n(x,t)=\int_a^b K_m(x,z)K_{n-m}(z,t)dz \qquad (۴-۱۸)$$

در اين صورت هسته حلال به صورت زير بدست مي آيد

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,t)\lambda^{n-1} \qquad (۴-۱۹)$$

كه سري فوق سري نيومن ناميده مي شود و به ازاي $|\lambda|<\frac{1}{\beta}$ همگراست. و در آن

$$\beta=\left(\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dtdx\right)^{1/2}<\infty.$$

بنابراين جواب معادله انتگرال (۴-۱۴) كه به صورت زير مي باشد

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt \qquad (۴-۲۰)$$

كه در آن

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,t)\lambda^{n-1}. \qquad (۴-۲۱)$$

تعريف: هسته هاي $K(x,t)$ و $L(x,t)$ را در فاصله $[a,b]$ متعامد گوئيم هرگاه:

$$\int_a^b K(x,z)L(x,t)dz=\int_a^b L(x,z)K(z,t)dz=0 \qquad (۴-۲۲)$$

مثال۱. نشان دهيد هسته هاي $K(x,t)=xt$ و $L(x,t)=x^2t^2$ در فاصله $[-1,1]$ متعامدند.

$$\begin{cases}\int_{-1}^{1}(xz)(z^2t^2)dz=0\\ \int_{-1}^{1}(x^2z^2)(zt)dz=0\end{cases}\Rightarrow K(x,t)\perp L(x,t).$$

نتيجه: هرگاه $K(x,t)$ بر خودش عمود باشد يعني $K(x,t)\perp K(x,t)$, آنگاه

$$\int_a^b K(x,z)K(z,t)dz=0\Rightarrow K_2(x,t)=K_3(x,t)=\ldots=0 \qquad (۴-۲۳)$$

مثال۲. اگر هسته $K_1(x,t)=x-t$ و $0\le x,t\le 1$، مطلوبست مابقي هسته ها؟

حل:

$$K_2(x,t)=\int_0^1(x-z)(z-t)dz=\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}$$

$$K_3(x,t)=\int_0^1 K_1(x,z)K_2(z,t)dz=\int_0^1(x-z)(\frac{z+t}{2}-zt-\frac{1}{3})dz$$

$$=-\frac{x-t}{12}=-\frac{1}{12}K_1(x,t)$$

$$K_4(x,t)=\int_0^1 K_1(x,z)K_3(z,t)dz=-\frac{1}{12}\int_0^1(z-t)(z-t)dz=-\frac{1}{12}K_2(x,t)$$

$$K_5(x,t)=\int_0^1 K_1(x,z)K_4(z,t)dz=-\frac{1}{12}\int_0^1 (x-z)K_2(z,t)dz$$
$$=-\frac{1}{12}K_3(x,t)=\left(-\frac{1}{12}\right)^2 K_1(x,t)$$

با توجه به موارد بالا K_{2n} و K_{2n+1} از روابط زیر قابل محاسبه اند

$$K_{2n+1}(x,t)=\left(-\frac{1}{12}\right)^n K_1(x,t),\qquad n=0,1,2,\ldots$$
$$K_{2n}(x,t)=\left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1} K_2(x,t),\qquad n=1,2,3,\ldots$$

مثال۳. مطلوب است حل معادله انتگرال زیر با روش محاسبه هسته هاي متوالي و در حالت خاص $f(x)=x$ معادله را حل کنید

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1 xt\varphi(t)dt. \qquad (۴-۲۴)$$

حل:

$$K_1(x,t)=K(x,t)=xt$$
$$K_2(x,t)=\int_0^1 (xz)(zt)dz=\frac{xt}{3}=\frac{1}{3}K_1(x,t)$$
$$K_3(x,t)=\frac{1}{3}\int_0^1 (xz)(zt)dz=\frac{1}{3^2}xt=\frac{1}{3^2}K_1(x,t)$$
$$K_n(x,t)=\frac{1}{3^{n-1}}xt$$

بنابراین هسته حلال برابر است با:

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,t)\lambda^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{xt}{3^{n-1}}\lambda^{n-1}=(xt)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1}$$
$$=(xt)\left(1+\frac{\lambda}{3}+(\frac{\lambda}{3})^2+\ldots\right)=\frac{xt}{1-\frac{\lambda}{3}}=\frac{3xt}{3-\lambda},\qquad \left|\frac{\lambda}{3}\right|<1 \qquad (۴-۲۵)$$

با جايگذاري هسته حلال و $f(x)=x$ در جواب معادله انتگرال داريم:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1 R(x,t,\lambda)f(t)dt=x+\lambda\int_0^1\frac{3xt}{3-\lambda}tdt=x+\frac{3\lambda x}{3-\lambda}\int_0^1 t^2dt$$
$$\varphi(x)=x+\frac{\lambda x}{3-\lambda}=\frac{3x}{3-\lambda}.$$

نکته: فرض کنید هسته هاي $M(x,t)$ و $N(x,t)$ در فاصله $[a,b]$ متعامد باشند در صورتیکه هر گاه R_M و R_N هسته هاي حلال معادلات انتگرال با هسته هاي $M(x,t)$ و $N(x,t)$ باشند و R نیز هسته حلال معادله انتگرال با هسته $K(x,t)=M(x,t)+N(x,t)$ ، در این صورت هسته حلال معادله انتگرال با هسته $K(x,t)$ برابر است با: $R=R_M+R_N$.

مثال۴. هسته حلال معادله انتگرال با هسته $K(x,t)=xt+x^2t^2$ را بدست آورید.

حل: با توجه به هسته حلال مثال۳ داریم:

$$N(x,t)=xt \Rightarrow R_N(x,t,\lambda)=\frac{3xt}{3-\lambda}$$
$$M(x,t)=x^2t^2 \Rightarrow R_M(x,t,\lambda)=\frac{5x^2t^2}{5-2\lambda}$$

از آنها نتیجه مي گيريم:

$$R(x,t,\lambda)=R_N+R_M=\frac{3xt}{3-\lambda}+\frac{5x^2t^2}{5-2\lambda}.$$

مثال۵. با فرض اینکه $K(x,t)=e^{\min(x,t)}$ ، مطلوب است محاسبه $K_2(x,t)$ در فاصله $0\le x,t\le 1$ ؟

حل: چون $K(x,t)$ متقارن است کافي است $K(x,t)$ را براي $x>t$ محاسبه کنیم.

تعريف: هسته $K(x,t)$ را متقارن گويند هرگاه داشته باشيم: $K(x,t)=K(t,x)$.

$K_2(x,t)$ را نسبت به متغیر z در فاصله $0<t<x<1$ محاسبه مي کنيم

$$K_2(x,t)=\int_0^t K(x,z)K(z,t)dz+\int_t^x K(x,z)K(z,t)dz+\int_x^1 K(x,z)K(z,t)dz$$
$$K_2(x,t)=\int_0^t e^z.e^z dz+\int_t^x e^z.e^t dz+\int_x^1 e^x.e^t dz$$
$$K_2(x,t)=\frac{1}{2}(e^{2t}-1)+e^t(e^x-e^t)+e^{x+t}(1-x)$$
$$K_2(x,t)=\begin{cases}(2-x)e^{x+t}-\frac{1}{2}(1+e^{2t}), & 0\le x\le t\le 1\\ (2-t)e^{x+t}-\frac{1}{2}(1+e^{2x}), & 0\le t\le x\le 1\end{cases}$$

حل معادله انتگرال ولترا نوع دوم با استفاده ازروش تکراري براي محاسبه هسته حلال

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (۲۶-۴)$$

روش تکراري براي حل معادلات انتگرال ولترا نوع دوم همانند روش تکراري معادلات انتگرال فردهولم است و جواب معادلات انتگرال ولترا رابطه زير بدست مي آيند:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x R(x,t,\lambda)f(t)dt \qquad (۲۷-۴)$$

که در آن

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(x,t)\lambda^{m-1} \qquad (۲۸-۴)$$

و هسته تکراري $K_m(x,t)$ از رابطه بازگشتي زير بدست مي آيد

$$K_m(x,t)=\int_t^x K_1(x,z)K_{m-1}(z,t)dz. \qquad (۲۹-۴)$$

مثال۱. سري نیومن (هسته حلال) را براي جوابي از معادله انتگرال زير پيدا کنيد

$$\varphi(x)=(1+x)+\lambda\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt. \qquad (۳۰-۴)$$

حل:از فرمول (۴-۲۹) داریم:

$$K_1(x,t) = K(x,t) = x-t$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x (x-z)(z-t)dz = \frac{(x-t)^3}{3!}$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x \frac{(x-z)(z-t)^3}{3!}dz = \frac{(x-t)^5}{5!}$$

به همين ترتيب بقيه هسته ها محاسبه مي شوند. بنابراين

$$K_m(x,t) = \int_t^x K_1(x,z)K_{m-1}(z,t)dz = \frac{(x-t)^{2m-1}}{(2m-1)!}, \qquad m = 1,2,3,...$$

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x,t)\lambda^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{2m-1}}{(2m-1)!}\lambda^{m-1}$$

$$\varphi(x) = (1+x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(2m-1)!}\int_0^x (x-t)^{2m-1}(1+t)dt$$

$$\varphi(x) = (1+x) + \lambda\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) + \lambda^2\left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right) + ...$$

كه براي $\lambda = 1$ ، داريم:

$$\varphi(x) = e^x.$$

مثال۲. معادله انتگرال زير را حل كرده و هسته حلال آن را تعيين كنيد

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt. \qquad (۴-۳۱)$$

حل: براي اين حالت،

$$K_1(x,t) = e^{x-t},$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x e^{x-z}.e^{z-t}dz = (x-t)e^{x-t},$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x (z-t)e^{x-z}e^{z-t}dz = \frac{(x-t)^2}{2!}e^{x-t},$$

$$K_m(x,t) = \frac{(x-t)^m}{m!}e^{x-t}.$$

كه هسته حلال برابر است با:

$$R(x,t,\lambda) = \begin{cases} e^{x-t}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} = e^{(\lambda+1)(x-t)}, & t \le x \\ 0, & t > x \end{cases}$$

بنابراين جواب معادله انتگرال (۴-۳۱) به صورت زير مي باشد

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x e^{(\lambda+1)(x-t)}f(t)dt.$$

مثال۳. معادله انتگرال ولتراي نوع دوم زير را حل كنيد

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x xt\varphi(t)dt. \qquad (۴-۳۲)$$

حل: در اين مثال داريم:

$$K_1(x,t)=K(x,t)=xt,$$
$$K_2(x,t)=\int_t^x (xz)(zt)dz=\frac{x^4t-xt^4}{3},$$
$$K_3(x,t)=\int_t^x (xz)\left[(z^4t-zt^4)/3\right]dz=\frac{x^7t-2x^4t^4+xt^7}{18},$$
$$K_4(x,t)=\int_t^x (xz)\left[(z^7t-2z^4t^4+zt^7)/18\right]dz=\frac{x^{10}t-3x^7t+3x^4t^7-xt^{10}}{162},$$

بنابراين جواب انتگرال عبارت است از:

$$\varphi(x)=1+\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{2.5}+\frac{x^9}{2.5.8}+\frac{x^{12}}{2.5.8.11}+\dots$$

حل معادله انتگرال فردهولم نوع دوم با هسته تباهيده

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt. \qquad (۳۳-٤)$$

فرض كنيم بجاي هسته $K(x,t)$ از $L(x,t)$ كه تقريبي از جملات بسط تيلور يا جملات بسط فوريه براي $K(x,t)$ است, استفاده نمائيم در اين صورت جواب تقريبي $\phi(x)$ با استفاده از معادله زير بدست مي آيد:

$$\phi(x)=f_1x)+\lambda\int_a^b L(x,t)\phi(t)dt \qquad (۳٤-٤)$$

فرض كنيم

$$\int_a^b |K(x,t)-L(x,t)|dt<c$$

كه در آن c عدد ثابت است. و هم چنين هسته حلال معادله (۳٤-٤) يعني $R_L(x,t,\lambda)$ در نامساوي زير صدق نمايد:

$$\int_a^b |R_L(x,t,\lambda)|dt<R_0,$$

و به همين ترتيب

$$|f(x)-f_1(x)|<\eta$$

كه در آنها R_0 و η اعداد ثابتند.

در صورتي كه شرط $1-\lambda c(1+|\lambda|R_0)>0$ برقرار باشد آنگاه معادله (۳۳-٤) داراي جوابي يكتاست كه

$$|\varphi(x)-\phi(x)|<\frac{N|\lambda|(1+|\lambda|R_0)^2c}{1-|\lambda|c(1+|\lambda|R_0)} \qquad (۳٥-٤)$$

كه در آن N كران بالاي براي $|f(x)|$ است.

فرض كنيم $\lambda=1$، قرار مي دهيم

$$K(x,t)=L(x,t)+\Lambda(x,t)$$

و فرض كنيم R_K و R_L به ترتيب هسته هاي حلال متناظر با هسته هاي $K(x,t)$ و $L(x,t)$ باشند در اين صورت نرم هاي آنها به صورت زير تعريف مي شوند:

$$\|\varphi(x)-\phi(x)\| \le \|\Lambda\|.(1+\|R_K\|).(1+\|R_L\|).\|f\| \tag{۴-۳۶}$$

$$\|R_k\| = \frac{\|K\|}{1-|\lambda|\|K\|}, \qquad \|K\| = \max_{a\le x\le b}\int_a^b |K(x,t)|dt \tag{۴-۳۷}$$

$$\|R_L\| = \frac{\|L\|}{1-|\lambda|\|L\|}, \qquad \|L\| = \max_{a\le x\le b}\int_a^b |L(x,t)|dt \tag{۴-۳۸}$$

$$\|f\| = \max_{a\le x\le b}|f(x)| \tag{۴-۳۹}$$

و يا نرم هاي $K(x,t)$ و $L(x,t)$ و $f(x)$ به صورت زير تعريف مي شوند:

$$\|K\| \le \left(\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt\right)^{1/2} \tag{۴-۴۰}$$

$$\|L\| \le \left(\int_a^b\int_a^b L^2(x,t)dxdt\right)^{1/2} \tag{۴-۴۱}$$

$$\|f\| \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2} \tag{۴-۴۲}$$

مثال۱. معادله انتگرال زير را باروش تقريبي حل كنيد.

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^1 (1-x\cos xt)\varphi(t)dt \tag{۴-۴۳}$$

حل: بسط تيلور $\cos xt$ را نوشته

$$\cos xt = 1-\frac{x^2t^2}{2!}+\frac{x^4t^4}{4!}-\dots$$

و هسته تقريبي $L(x,t)$ را با دو جمله اين بسط مي نويسيم

$$L(x,t) = 1-x\left(1-\frac{x^2t^2}{2}\right) = 1-x+\frac{x^3t^2}{2} \tag{۴-۴۴}$$

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sin x + \int_0^1\left(1-x+\frac{x^3t^2}{2}\right)\phi(t)dt \\ &= \sin x + (1-x)\int_0^1 \phi(t)dt + \frac{x^3}{2}\int_0^1 t^2\phi(t)dt\end{aligned} \tag{۴-۴۵}$$

با روش مستقيم تابع $\phi(x)$ را مي توان محاسبه كرد

$$\phi(x) = \sin x + (1-x)c_1 + \frac{x^3}{2}c_2 \tag{۴-۴۶}$$

كه در آن

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 \phi(t)dt \\ c_2 = \int_0^1 t^2\phi(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \int_0^1 \left[\sin t + (1-t)c_1 + \frac{t^3}{2}c_2\right]dt \\ c_2 = \int_0^1 t^2\left[\sin t + (1-t)c_1 + \frac{t^3}{2}c_2\right]dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{4}c_2 = 1-\cos 1 \\ -\frac{1}{24}c_1 + \frac{11}{12}c_2 = \sin 1 + \frac{1}{2}\cos 1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1.0031 \\ c_2 = 0.1674 \end{cases}$$

با قرار دادن مقادير c_1 و c_2 در رابطه (٤-٤٦) تابع $\phi(x)$ مشخص مي شود

$$\phi(x) = \sin x + 1.0031(1-x) + \frac{0.1674}{2}x^3 \qquad (٤٧-٤)$$

و جواب واقعي $\varphi(x) = 1$ است كه با جايگذاري در معادله (٤-٤٣) نتيجه مي شود

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x\cos xt)dt = \sin x + 1 - x\left(\frac{1}{x}\sin x\right) = 1$$

از رابطه $K(x,t) = L(x,t) + \Lambda(x,t)$ نتيجه مي گيريم:

$$\Lambda(x,t) = (1 - x\cos xt) - \left(1 - x + \frac{x^3t^2}{2}\right) \equiv \frac{x^5t^4}{4!} \qquad (٤٨-٤)$$

$$\|\Lambda\| \le \left(\int_0^1\int_0^1 (\frac{x^5t^4}{4!})^2 dxdt\right)^{1/2} = \frac{1}{24}\left(\int_0^1\int_0^1 x^{10}t^8 dxdt\right)^{1/2} = \frac{1}{24}.\frac{1}{\sqrt{11}}.\frac{1}{3} \le 0.0042$$

$$\|K\| \le \left(\int_0^1\int_0^1 (1 - x\cos xt)^2 dxdt\right)^{1/2} = \left(2\cos 1 - \frac{1}{3}\cos 2 + \frac{1}{16}\sin 2 - \frac{5}{6}\right)^{1/2} \le 0.6$$

$$\|L\| \le \left(\int_0^1\int_0^1 (1 - x + \frac{x^3t^2}{2})^2 dxdt\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{5}{14}} \le 0.6$$

$$\|f\| \le \left(\int_0^1 \sin^2 dx\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sin 2} \le .52$$

$$\|R_K\| = \frac{\|K\|}{1 - |\lambda|\|K\|} = \frac{0.6}{1-0.6} = 1.5$$

$$\|R_L\| = \frac{\|L\|}{1 - |\lambda|\|L\|} = \frac{0.6}{1-0.6} = 1.5$$

حالا با استفاده از رابطه (٤-٣٦) مي توان يك كران بالاي براي $\|\varphi - \phi\|$ پيدا كرد

$$\|\varphi(x) - \phi(x)\| \le \|\Lambda\|.(1 + \|R_k\|).(1 + \|R_L\|).\|f\| = 0.0042(1+1.5)(1+1.5)(0.52)$$

$$\|\varphi(x) - \phi(x)\| \le 0.01365.$$

مثال٢. اولا نشان دهيد معادله انتگرال

$$\varphi(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt} - 1)\varphi(t)dt \qquad (٤٩-٤)$$

داراي جواب $\varphi(x) = 1$ است. سپس با روش تقريبي جواب $\phi(x)$ را بدست آورده و يك كران بالا براي $\|\varphi - \phi\|$ بدست آوريد.

حل: با قرار دادن $\varphi(t) = 1$، در مي يابيم كه

$$\varphi(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt} - 1)dt = e^x - x - x\left[\frac{1}{x}e^{xt} - t\right]_0^1$$

$$\varphi(x) = e^x - x - e^x + x + 1 = 1$$

بسط تابع e^{xt} را نوشته و دو جمله اول آن را براي محاسبه $\phi(x)$ در نظر مي گيريم

$$e^{xt} = 1 + xt + \frac{x^2t^2}{2!} + \frac{x^3t^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{xt} \cong 1 + xt$$

$$\phi(x) = e^x - x - \int_0^1 x(1 + xt - 1)\phi(t)dt = e^x - x - x^2\int_0^1 t\phi(t)dt \qquad (۵۰\text{-}۴)$$

با انتخاب $c = \int_0^1 t\phi(t)dt$ داريم:

$$\phi(x) = e^x - x - cx^2$$

$$c = \int_0^1 t\phi(t)dt = \int_0^1 t\left(e^t - t - ct^2\right)dt = \left[te^t - e^t - \frac{1}{3}t^3 - \frac{c}{4}t^4\right]_0^1$$

$$c = e - e - \frac{1}{3} - \frac{c}{4} + 1 \Rightarrow c = \frac{4}{5}.\frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

$$\phi(x) = e^x - x - \frac{8}{15}x^2.$$

هسته هاي $K(x,t)$ و $L(x,t)$ و $\Lambda(x,t)$ عبارتند از:

$$K(x,t) = x(e^{xt} - 1),$$

$$L(x,t) = x(1 + xt - 1) = x^2t,$$

$$\Lambda(x,t) = K(x,t) - L(x,t) \equiv \frac{x^3t^2}{2},$$

$$f(x) = e^x - x,$$

حالا نرم هاي آنها را محاسبه مي كنيم:

$$\|K\| \le \left(\int_0^1\int_0^1 x^2(e^{xt} - 1)^2 dxdt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 x^2\left[\frac{1}{2x}e^{2xt} - \frac{2}{x}e^{xt} + t\right]_0^1 dx\right)^{1/2}$$

$$\|K\| \le \left(\int_0^1\left[\frac{1}{2}xe^{2x} - 2xe^x + x^2 - \frac{x}{2} + 2x\right]dx\right)^{1/2}$$

$$\|K\| \le \left(\left[\frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{3}x^3 - 2xe^x + 2e^x + \frac{3}{4}x^2\right]_0^1\right)^{1/2} = \left(\frac{e^2}{8} - \frac{19}{24}\right)^{1/2} \le 0.37$$

$$\|L\| \le \left(\int_0^1\int_0^1 x^4t^2 dxdt\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{15}\right)^{1/2} \le 0.26$$

$$\|\Lambda\| \le \left(\int_0^1\int_0^1 \frac{x^6t^4}{4}dxdt\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}.\frac{1}{7}\right)^{1/2} \le 0.085 \qquad (۵۱\text{-}۴)$$

$$\|f\| \le \left(\int_0^1 (e^x - x)^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (e^{2x} - 2xe^x + x^2)dx\right)^{1/2} = \left(\left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2xe^x + 2e^x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1\right)^{1/2}$$

$$\|f\| \le \left(\frac{1}{2}e^2 - 2e + 2e + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{13}{6}\right)^{1/2} \le 1.27 \qquad (٥٢-٤)$$

بنابراين $\|R_K\|$ و $\|R_L\|$ به سادگي در زير حاصل مي شوند

$$\|R_K\| \le \frac{\|K\|}{1 - |\lambda|\|K\|} = \frac{0.37}{1 - |-1|(0.37)} = \frac{0.37}{0.63} \le 0.59 \qquad (٥٣-٤)$$

$$\|R_L\| \le \frac{\|L\|}{1 - |\lambda|\|L\|} = \frac{0.26}{1 - 0.26} = \frac{0.26}{0.74} \le 0.36 \qquad (٥٤-٤)$$

لذا با جايگذاري مقدار نرم هاي بالا در نامساوي زير يك كران بالا براي $\|\varphi - \phi\|$ بدست مي آيد

$$\|\varphi - \phi\| \le \|\Lambda\|.(1 + \|R_K\|)(1 + \|R_L\|).\|f\| = (0.085)(1 + 0.59)(1 + 0.36)(1.27)$$

$$\|\varphi - \phi\| \le 0.24$$

حل برخي معادلات انتگرال با استفاده از تبديلات انتگرالي

فرض كنيد تابع $F(x)$ در فاصله $[0,+\infty)$ پيوسته و بطور مطلق (مطلقا) انتگرال پذير باشد و داراي تعداد متناهي ماكزيمم يا مينيمم در هر فاصله $[a,b]$ از محورهاي مثبت باشد. تبديل فوريه كسينوس $F(x)$ عبارت است از:

$$F_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F(x)\cos\lambda x dx \qquad (٥٥-٤)$$

و تبديل معكوس كسينوس عبارت است از:

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_1(\lambda)\cos\lambda x d\lambda \qquad (٥٦-٤)$$

از روابط (٤-٥٥) و (٤-٥٦) با تغيير متغير $\lambda \to t$ و $x \to t$ داريم:

$$\begin{cases} F_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F(t)\cos xt dt \\ F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_1(t)\cos xt dt \end{cases} \qquad (٥٧-٤)$$

قرار مي دهيم:

$$F_1(x) + F(x) = \varphi(x) \qquad (٥٨-٤)$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos xt[F_1(t) + F(t)]dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos xt\varphi(t)dt \qquad (٥٩-٤)$$

بنابراين معادله انتگرال (٤-٥٩) داراي جوابي بصورت (٤-٥٨) مي باشد. معادله انتگرال (٤-٥٩) داراي تعداد نامتناهي جواب مستقل خطي است.

براي بدست آوردن يكي از جوابهاي معادله (٤-٥٩) قرار مي دهيم:

$$F(x) = e^{-ax}$$

$$F_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-at}\cos xt dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{a}{x^2 + a^2} \qquad (٦٠-٤)$$

بنابراين

$$F_1(x)+F(x)=\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{a}{x^2+a^2}+e^{-ax} \qquad (٤\text{-}٦١)$$

در صورتيكه معادله انتگرال بصورت كلي

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\infty \varphi(t)\cos xtdt \qquad (٤\text{-}٦٢)$$

باشد مقدار λ عبارت است از:

$$e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{a}{a^2+x^2}=\lambda\int_0^\infty\left(e^{-at}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{a}{a^2+t^2}\right)\cos xtdt$$
$$=\lambda\left[\int_0^\infty e^{-at}\cos xtdt+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{a\cos xtdt}{a^2+t^2}\right] \qquad (٤\text{-}٦٣)$$

حاصل انتگرالهاي اول دوم رابطه (٤-٦٣) بكمك تبديل لاپلاس و مانده ها عبارتند از:

$$\int_0^\infty e^{-at}\cos xtdt=\frac{a}{a^2+x^2}, \qquad \int_0^\infty\frac{\cos xtdt}{a^2+t^2}=\frac{\pi}{2a}e^{-ax},$$

با جايگذاري در رابطه (٤-٦٣) داريم:

$$e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\frac{a}{a^2+x^2}=\lambda\left[\frac{a}{a^2+x^2}\right]+\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\frac{\pi}{2}e^{-ax}\Rightarrow\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

قضيه: براي حل معادلات انتگرال فردهولم نوع دوم با هسته متقارن ($K(x,t)=K(t,x)$)،

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (٤\text{-}٦٤)$$

فرض كنيد تابع $f(x)$ پيوسته باشد و اگر λ_n مقادير ويژه معادله همگن

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (٤\text{-}٦٥)$$

باشد و توابع ويژه متناظر با λ_n ها را هم φ_n در نظر بگيريد در اين صورت معادله (٤-٦٤) داراي جوابي به صورت زير است:

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(x), \quad \lambda\neq\lambda_n \qquad (٤\text{-}٦٦)$$

كه در آن

$$a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \qquad (٤\text{-}٦٧)$$

نكته: $\lambda=\lambda_n$ مقدار ويژه با تكرار q متناظر با توابع ويژه $\varphi_j(x)$ است اگر و فقط اگر

$$(\varphi_n,f(x))=0\Leftrightarrow a_n=\int_a^b\varphi_n(x)f(x)dx=0 \qquad (٤\text{-}٦٨)$$

در اين صورت جوابهاي ديگر معادله عبارتند از:

$$\sum_{j=1}^q c_j\varphi_j(x).$$

مثال۱. معادله انتگرال فردهولم نوع دوم با هسته متقارن زیر را حل کنید

$$\varphi(x) = x + \lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt, \qquad K(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \le x \le t \\ t(x-1), & t \le x \le 1 \end{cases} \tag{۶۹-۴}$$

حل: براي پيدا كردن مقاير ويژه معادله همگن زير را حل مي كنيم:

$$\varphi(x) = \lambda\left[\int_0^x t(x-1)\varphi(t)dt + \int_x^1 x(t-1)\varphi(t)dt\right] \tag{۷۰-۴}$$

با دو بار مشتق گيري از معادله (۴-۷۰) با استفاده از قاعده لايب نيتز داريم:

$$\varphi'(x) = \lambda\left[\int_0^x t\varphi(t)dt + (x-1)x\varphi(x) + \int_x^1 (t-1)\varphi(t)dt - x(x-1)\varphi(x)\right],$$

$$\varphi'(x) = \lambda\left[\int_0^x t\varphi(t)dt + \int_x^1 (t-1)\varphi(t)dt\right] \tag{۷۱-۴}$$

$$\varphi''(x) = \lambda[x\varphi(x) - (x-1)\varphi(x)],$$

پس از ساده كردن معادله ديفرانسيل مرتبه دوم زير بدست مي آيد

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0, \qquad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0 \tag{۷۲-۴}$$

$$m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{\lambda}, \qquad \lambda \ne 0$$

اگر $\lambda > 0$ ، جواب معادله بصورت زير مي باشد

$$\varphi(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \tag{۷۳-۴}$$

از مقادير اوليه داريم:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ \varphi(1) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_c e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_2(-e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ \text{يا} \ c_2 = 0$$

چون $\lambda \ne 0$ ، در نتيجه بايد $c_2 = 0$ ، و از آن نتيجه مي گيريم، $c_1 = 0$، بنابراين معادله مقادير ويژه ندارد

اگر $\lambda < 0$ ، آنگاه

$$\varphi(x) = c_1\cos(\sqrt{-\lambda})x + c_2\sin(\sqrt{-\lambda})x \tag{۷۴-۴}$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\varphi(1) = 0 \Rightarrow c_2\sin\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = n\pi^2$$

بنابراين مقادير ويژه و توابع ويژه متناظر آنها عبارتند از:

$$\lambda_n = -n^2\pi^2, \quad n = 1,2,3,\ldots \qquad \varphi_n(x) = c_2\sin n\pi x \tag{۷۵-۴}$$

كه c_2 عدد ثابت دلخواه است، با فرض $c_2 = 1$ داريم:

$$\varphi_n(x) = \sin n\pi x \tag{۷۶-۴}$$

و

$$a_n = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx = \int_0^1 x.\sin n\pi x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \tag{۷۵-۴}$$

در نتيجه معادله انتگرال برابر است با:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\varphi_n(x) = x - \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi(\lambda + n^2\lambda^2)}\sin n\pi x. \tag{۷۶-۴}$$

مثال۲. معادله انتگرال فردهولم با هسته متقارن زير را حل كنيد

$$\varphi(x) = \cos 2x + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,t)\varphi(t)dt, \quad K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \le x \le t \\ \sin t \cos x, & t \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (۷۷-٤)$$

حل: از معادله همگن زیر با استفاده از قاعده لایب نیتز دو بار مشتق مي گيريم:

$$\varphi(x) = \lambda\left\{\cos x\int_0^x \sin t\varphi(t)dt + \sin x\int_x^{\pi/2}\cos tdt\right\} \qquad (۷۸-٤)$$

$$\varphi'(x) = \lambda\left\{-\sin x\int_0^x \sin t\varphi(t)dt + \cos x\sin x\varphi(x) + \cos x\int_x^{\pi/2}\cos t\varphi(t)dt - \sin x\cos x\varphi(x)\right\}$$

$$\varphi'(x) = \lambda\left\{-\sin x\int_0^x \sin t\varphi(t)dt + \cos x\int_x^{\pi/2}\cos t\varphi(t)dt\right\}$$

$$\varphi''(x) = \lambda\left\{-\cos x\int_0^x \sin t\varphi(t)dt - \sin^2 x\varphi(x) - \sin x\int_x^{\pi/2}\cos t\varphi(t)dt - \cos^2 x\varphi(x)\right\}$$

$$\varphi''(x) = -\varphi(x) - \lambda\varphi(x)$$

معادله ديفرانسيل مرتبه دوم زير را براي حالتهاي مختلف λ حل مي كنيم

$$\varphi''(x) + (\lambda+1)\varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\frac{\pi}{2}) = 0 \qquad (۷۹-٤)$$

$$m^2 + (\lambda+1) = 0 \Rightarrow m^2 = -(\lambda+1)$$

اگر $\lambda = -1$ ، در اين حالت جواب معادله (۷۹-٤) به صورت زير مي باشد

$$\varphi(x) = c_1x + c_2$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

$$\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0.$$

اگر $\lambda < -1$ ، آنگاه $-(\lambda+1) > 0$ و $m = \pm\sqrt{-(\lambda+1)}$ ، بنابراين

$$\varphi(x) = c_1e^{\sqrt{-(\lambda+1)}x} + c_2e^{-\sqrt{-(\lambda+1)}x} \qquad (۸۰-٤)$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

$$\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0.$$

اگر $\lambda > -1$ ، آنگاه $-(\lambda+1) < 0$ و $m = \pm i\sqrt{\lambda+1}$ ، لذا

$$\varphi(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda+1})x + c_2\sin(\sqrt{\lambda+1})x \qquad (۸۱-٤)$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

$$\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow c_2\sin(\sqrt{\lambda+1})\frac{\pi}{2} = 0 \xrightarrow{C_2\neq 0} \sin(\sqrt{\lambda+1})\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$(\sqrt{\lambda+1})\frac{\pi}{2} = n\pi \Rightarrow \lambda_n = 4n^2 - 1 \qquad (۸۲-٤)$$

وتوابع ويژه متناظر با مقادير ويژه عبارتند از:

$$\varphi_n(x) = c_2\sin 2nx, \qquad (۸۳-٤)$$

و چون c_2 عدد ثابت دلخواه است با فرض $c_2 = 1$ ، داريم:

$$\varphi_n(x) = \sin 2nx.$$

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos 2x . \sin 2nx dx = \frac{1}{2}\int [\sin 2(n+1)x + \sin 2(n-1)x] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2(n+1)}\cos 2(n+1)x - \frac{1}{2(n-1)}\cos 2(n-1)x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right]$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2n}{4n^2-1}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad (۸۴-۴)$$

نهایتا، جواب معادله انتگرال (۴-۷۷) به صورت زیر در مي آيد

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x) = \cos 2x - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(4n^2-1)(\lambda + 1 - 4n^2)} \sin 2nx$$

$$\varphi(x) = \cos 2x + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)(4n^2-3)} \sin 2nx.$$

مثال۳. معادله انتگرال با هسته متقارن زیر را حل کنید

$$\varphi(x) = \cos \pi x + \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt, \qquad K(x,t) = \begin{cases} (x+1)t, & 0 \le x \le t \\ (t+1)x, & t \le x \le 1 \end{cases} \qquad (۸۵-۴)$$

حل: پس از قرار دادن هسته در معادله انتگرال و مشتق گيري بكمك قاعده لايب نيتز و حل معادله ديفرانسيل جوابها عبارتند از:

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_n = -n^2\pi^2 \qquad (۸۶-۴)$$

كه توابع ويژه متناظر با مقادير ويژه عبارتند از:

$$\varphi_0(x) = e^x, \qquad \varphi_n(x) = \sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x \qquad (۸۷-۴)$$

$$\varphi(x) = \cos \pi x - \lambda\left[\frac{a_0}{\lambda - 1}e^x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2}(\sin n\pi x + + n\pi \cos n\pi x)\right] \qquad (۸۸-۴)$$

كه در آن

$$a_0 = \int_0^1 e^x \cos \pi x dx = -\frac{1+e}{1+\pi^2} \neq 0$$

$$a_n = \int_0^1 (\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x)\cos \pi x dx = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = 1 \end{cases}$$

بنابراين با جايگذاري روابط فوق در رابطه (۴-۸۸) داريم:

$$\varphi(x) = \cos \pi x + \lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2} . \frac{e^x}{\lambda - 1}\right] - \frac{\lambda\pi}{2(\lambda + \pi^2)}(\sin \pi x + \pi \cos \pi x)$$
$$+ \sum_{j=2}^{\infty} c_j(\sin j\pi x + j\pi \cos j\pi x).$$

مثال۴. در معادله انتگرال فردهولم نوع دوم $\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \frac{x}{2}$ ،

با فرض $K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, & 0\le x\le t\\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t\le x\le 1\end{cases}$ ، مطلوب است تعیین $\varphi(x)$.

حل: از معادله انتگرال همگن زیر دو بار مشتق مي گيريم:

$$\varphi(x)=\frac{\pi^2}{4}\left\{(\frac{2-x}{2})\int_0^x t\varphi(t)dt+\frac{x}{2}\int_x^1(2-t)\varphi(t)dt\right\}$$

$$\varphi'(x)=\frac{\pi^2}{4}\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x t\varphi(t)dt+\frac{1}{2}\int_x^1(2-t)\varphi(t)dt\right\}$$

$$\varphi''(x)=\frac{\pi^2}{4}\left\{-\frac{1}{2}x\varphi(x)-\varphi(x)+\frac{1}{2}x\varphi(x)\right\}=-\frac{\pi^2}{4}\varphi(x)$$

$$\varphi''(x)+\frac{\pi^2}{4}\varphi(x)=0,\qquad \varphi(0)=0$$

$$m^2+\frac{\pi^2}{4}=0\Rightarrow m=\pm i\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi(x)=c_1\cos(\frac{\pi}{2})x+c_2\sin(\frac{\pi}{2})x$$

$$\varphi(0)=0\Rightarrow c_1=0\Rightarrow \varphi(x)=c_2\sin(\frac{\pi}{2})x$$

$$a_1=a_n=\int_0^1\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{2}xdx=-\frac{2}{\pi}.\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\Big|_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}xdx=\frac{2}{\pi^2}$$

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(x)=\frac{x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2(\lambda-\frac{\pi}{2})}\sin\frac{\pi}{2}2x$$

$$\varphi(x)=\frac{x}{2}-\frac{2}{\pi^2-2\pi}\sin\frac{\pi}{2}x.$$

روش كلاك (Kellogg) در محاسبه كوچكترين مقدار ويژه

قضيه: فرض كنيم $K(x,t)$ هسته متقارن معادله انتگرال باشد و $\omega(x)$ تابع آغازين اختياري و $\omega(x)\in L_2(a,b)$ ، در اين صورت رشته توابع زير را بكمك $\omega(x)$ بيان مي كنيم:

$$\omega_1(x)=\int_a^b K(x,t)\omega(x)dt,$$

$$\omega_2(x)=\int_a^b K(x,t)\omega_1(x)dt,$$

$$\vdots$$

$$\omega_n(x)=\int_a^b K(x,t)\omega_{n-1}(x)dt.$$

اگر $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ توابع ويژه متناظر با مقادير ويژه $\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots$ باشند در صورتي كه

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad , \qquad \omega(x) \perp \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k-1},$$

ولي $\omega(x)$ بر φ_k عمود نباشد، در اين صورت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|} = \lambda_k$$

نكته: در صورتي كه $\omega(x)$ بر φ_1 عمود نباشد ، ميتوان نوشت:

$$\frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|} \approx \lambda_1$$

تعريف: قدرمطلق انتگرال دوگانه زير را انتگرال هيلبرت مي ناميم:

$$I = \left| \int_a^b \int_a^b K(x,t)\varphi(x)\varphi(t)dxdt \right|$$

با فرض اينكه هسته متقارن باشد

$$\max \left| \int_a^b \int_a^b K(x,t)\varphi(x)\varphi(t)dxdt \right| = \frac{1}{|\lambda_1|}$$

كه در آن λ_1 مقدار ويژه اي است كه حداقل قدرمطلق را دارد.

مثال۱. اگر $K(x,t) = x^2t^2$ هسته متقارن معادله انتگرال و $\omega(x) = x$ تابع آغازين در فاصله $[0,1]$ باشد مطلوبست محاسبه λ_1 .

حل:

$$\omega_1(x) = \int_0^1 (x^2t^2)tdt = \frac{x^2}{4},$$

$$\omega_2(x) = \int_0^1 (x^2t^2)(\frac{t^2}{4})dt = \frac{x^2}{4}.\frac{1}{5},$$

$$\vdots$$

$$\omega_n(x) = \frac{1}{4.5^{n-1}}x^2,$$

$$\omega_{n-1}(x) = \frac{1}{4.5^{n-2}}x^2,$$

$$\|\omega_n\| = \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{4.5^{n-1}} \right)^2 x^4dx \right]^{1/2} = \frac{1}{4.5^{n-1}}.\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\|\omega_{n-1}\| = \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{4.5^{n-2}} \right)^2 x^4dx \right]^{1/2} = \frac{1}{4.5^{n-2}}.\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|} = 5$$

مثال۲. در معادله انتگرال زير با هسته متقارن ، كوچكترين مقدار ويژه را پيدا كنيد

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 xt\varphi(t)dt. \qquad (۸۹-٤)$$

حل: با استفاده از روش مستقیم داریم:

$$\varphi(x)=\lambda x\int_0^1 t\varphi(t)dt=\lambda cx,$$

که در آن

$$c=\int_0^1 t\varphi(t)dt=\int_0^1 t(\lambda ct)dt=\frac{1}{3}\lambda c\Rightarrow\lambda=3$$

بنابراین $\varphi(x)=3cx$ ، و از $\langle\varphi,\varphi\rangle=1$ داریم:

$$\langle 3cx,3cx\rangle=1\Rightarrow\int_0^1 9c^2x^2dx=1\Rightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\varphi(x)=\sqrt{3}x$$

$$\max\left|\int_0^1\int_0^1(xt)(\sqrt{3}x)(\sqrt{3}t)dxdt\right|=\frac{1}{3}=\frac{1}{|\lambda_1|}.$$

اتحاد توابع دلتاي ديراك

$$\delta(F(x))=\sum_n\frac{1}{|F'(x_n)|}\delta(x-x_n),\qquad(۴\text{-}۹۰)$$

که در آن x_n ها ریشه ساده $F(x)$ اند.

مثال:

$$\delta(\sin x)=\sum_k\delta(x-k\pi),$$

$$\delta(\cos x)=\sum_k\delta(x-\frac{k\pi}{2}),$$

$$\delta(x^2-\alpha^2)=\frac{1}{|2\alpha|}[\delta(x+\alpha)+\delta(x-\alpha)],$$

$$F(x)=x^2-\alpha^2,\quad F'(x)=2x,\quad x=\pm\alpha\neq 0$$

مثال۱. معادله انتگرال منفرد زیر را حل کنید

$$\int_2^s\frac{g(t)dt}{(s^2-t^2)^{1/3}}=s^2.\qquad(۴\text{-}۹۱)$$

حل: با یادآوري معادله انتگرال منفرد رابطه (۲-۹۲)،

$$f(s)=\int_a^s\frac{g(t)dt}{[h(s)-h(t)]^\alpha},\quad 0<\alpha<1\qquad(۴\text{-}۹۲)$$

و جواب آن در رابطه (۲-۱۰۰)،

$$g(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dt}\int_a^t\frac{h'(u)f(u)du}{[h(t)-h(u)]^{1-\alpha}},\qquad(۴\text{-}۹۳)$$

توجه مي كنيم كه در معادله انتگرال (۴-۹۱)، $h(t)=t^2$ تابع صعودي و $f(s)=s^2$ و $\alpha=\frac{1}{3}$ ، بنابراین

$$g(t)=\frac{\sin(\pi/3)}{\pi}\frac{d}{dt}\int_2^t\frac{2u.u^2du}{(t^2-u^2)^{2/3}}=\frac{-\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_2^t u^2\left(\frac{-2u}{(t^2-u^2)^{2/3}}\right)du\qquad(۴\text{-}۹۴)$$

با استفاده از انتگرال جز به جز در رابطه (۴-۹۴) داریم:

$$g(t)=\frac{-\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dt}\left\{3u^2(t^2-u^2)^{1/3}\Big|_2^t-\int_2^t 6u(t^2-u^2)^{1/3}du\right\}$$

$$=\frac{-\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dt}\left\{-12(t^2-4)^{1/3}-6\int_2^t u(t^2-u^2)^{1/3}du\right\} \qquad (۹۵-٤)$$

در انتگرال (٤-۹۵) با تغییر متغیر $t^2-u^2=X$ داریم:

$$g(t)=\frac{-\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dt}\left\{-12(t^2-4)^{1/3}+\frac{9}{4}(t^2-u^2)^{4/3}\Big|_2^t\right\}$$

$$=\frac{-\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dt}\left\{-12(t^2-4)^{1/3}-\frac{9}{4}(t^2-4)^{4/3}\right\}$$

$$g(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left\{-8t(t^2-4)^{-2/3}-6t(t^2-4)^{1/3}\right\}$$

$$g(t)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left\{4t(t^2-4)^{-2/3}+3t(t^2-4)^{1/3}\right\}$$

مثال۲. نشان دهید جواب معادله انتگرال $f(s)=2\int_s^1\frac{tg(t)dt}{(t^2-s^2)^{1/2}}$ ، $g(s)=-\frac{1}{\pi s}\frac{d}{ds}\int_s^1\frac{tf(t)dt}{(t^2-s^2)^{1/2}}$ است. سپس معادله را براي $f(s)=s^2$ حل کنید.

حل: از معادله انتگرال منفرد

$$f(s)=\int_s^b\frac{g(t)dt}{[h(t)-h(s)]^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1 \qquad (۹٦-٤)$$

و جواب آن

$$g(s)=-\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{ds}\int_s^b\frac{h'(u)f(u)du}{[h(u)-h(s)]^{1-\alpha}}, \qquad (۹۷-٤)$$

براي حل معادله انتگرال استفاده مي کنیم

$$\frac{f(s)}{2}=\int_s^1\frac{tg(t)dt}{(t^2-s^2)^{1/2}}\Rightarrow sg(s)=-\frac{\sin(\pi/2)}{\pi}\frac{d}{ds}\int_s^1\frac{2u.\frac{f(u)}{2}du}{(u^2-s^2)^{1/2}}$$

$$g(s)=-\frac{1}{\pi s}\frac{d}{ds}\int_s^1\frac{uf(u)du}{(u^2-s^2)^{1/2}} \qquad (۹۸-٤)$$

براي حل قسمت دوم مساله در رابطه (٤-۹۸) ، $f(u)=u^2$ را قرار مي دهیم

$$g(s)=-\frac{1}{\pi s}\frac{d}{ds}\int_s^1\frac{u.u^2du}{(u^2-s^2)^{1/2}}=-\frac{1}{2\pi s}\frac{d}{ds}\int_s^1 u^2.\frac{2u}{(u^2-s^2)^{1/2}}du \qquad (۹۹-٤)$$

با استفاده از روش جز به جز در انتگرال (٤-۹۹) داریم:

$$g(s)=-\frac{1}{2\pi s}\frac{d}{ds}\left\{2u^2(u^2-s^2)^{1/2}\Big|_s^1-2\int_s^1 2u(u^2-s^2)^{1/2}du\right\}$$

$$g(s)=-\frac{1}{2\pi s}\frac{d}{ds}\left\{2(1-s^2)^{1/2}-2.\frac{2}{3}(u^2-s^2)^{3/2}\Big|_s^1\right\}$$

$$g(s)=-\frac{1}{2\pi s}\frac{d}{ds}\left\{2(1-s^2)^{1/2}-\frac{4}{3}(1-s^2)^{3/2}\right\}$$

$$g(s)=-\frac{1}{2\pi s}\left\{2\times\frac{1}{2}(-2s)(1-s^2)^{-1/2}-\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}(-2s)(1-s^2)^{1/2}\right\}$$

$$g(s)=\frac{1}{\pi}\left\{(1-s^2)^{-1/2}-2(1-s^2)^{1/2}\right\}$$

مثال۳. معادله انتگرال زیر را حل کنید

$$\int_0^s\frac{g(t)dt}{(s^2-t^2)^{1/2}}=\frac{f(s)}{s},\qquad f(s)=\begin{cases}f_1(s), & 0\le s\le a\\ f_2(s), & a<s\end{cases}\qquad (۱۰۰\text{-}۴)$$

حل: با استفاده از جواب معادله انتگرال منفرد در رابطه (۴-۹۳) داریم:

$$g(t)=\frac{\sin(\pi/2)}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(s^2)'\left(\frac{f(s)}{s}\right)}{(t^2-s^2)^{1/2}}ds=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{f(s)}{(t^2-s^2)^{1/2}}ds\qquad (۱۰۱\text{-}۴)$$

با تغییر متغیر $s=t\sin\varphi$ ، در رابطه (۴-۱۰۱) داریم:

$$g(t)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi/2}\frac{f(t\sin\varphi)}{\sqrt{t^2-t^2\sin^2\varphi}}t\cos\varphi d\varphi=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi/2}f(t\sin\varphi)d\varphi\qquad (۱۰۲\text{-}۴)$$

بنا به مشتق قاعده لایب نیتز رابطه (۴-۱۰۲) به صورت زیر در مي آید

$$g(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi f'(t\sin\varphi)d\varphi\qquad (۱۰۳\text{-}۴)$$

تابع $f(s)$ را بر حسب $f_1(s)$ و $f_2(s)$ به صورت زیر مي نویسیم

$$f(s)=f_1(s)\big(1-H(s-a)\big)+f_2(s)H(s-a)\qquad (۱۰۴\text{-}۴)$$

از طرفین رابطه (۴-۱۰۴) نسبت به s مشتق مي گیریم

$$f'(s)=f_1'(s)\big(1-H(s-a)\big)+f_2'(s-a)H(s-a)+f_1(s)\big(-\delta(s-a)\big)+f_2(s)\delta(s-a)$$

$$f'(s)=f_1'(s)\big(1-H(s-a)\big)+f_2'(s)H(s-a)-f_1(a)\delta(s-a)+f_2(a)\delta(s-a)$$

$$f'(s)=f_1'(s)\big(1-H(s-a)\big)+f_2'(s)H(s-a)+\delta(s-a)\big(f_2(a)-f_1(a)\big),\qquad (۱۰۵\text{-}۴)$$

از طرفین رابطه (۴-۱۰۵) از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ انتگرال مي گیریم

$$g(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[f_1'(s)\big(1-H(s-a)\big)+f_2'(s)H(s-a)+\delta(s-a)\big(f_2(a)-f_1(a)\big)\right]ds,\quad (۱۰۶\text{-}۴)$$

با قرار دادن $s=t\sin\varphi$ و $a=t\sin\alpha$ در رابطه (۴-۱۰۶) داریم:

$$g(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f_1'(t\sin\varphi)[1-H(t\sin\varphi-t\sin\alpha)]+f_2'(t\sin\varphi)H(t\sin\varphi-t\sin\alpha)\}\sin\varphi d\varphi$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\{\delta(t\sin\varphi-t\sin\alpha)[f_2(a)-f_1(a)]\}\sin\varphi d\varphi\qquad (۱۰۷\text{-}۴)$$

با استفاده از خواص تابع دلتاي ديراك در رابطه (٤-۹۰) مي توان رابطه زير نوشت

$$\delta(t\sin\varphi - t\sin\alpha) = \frac{\delta(\varphi-\alpha)}{t\cos\alpha} \qquad (۱۰۸\text{-}٤)$$

و همچنين باز با استفاده از خواص تابع دلتاي ديراك

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\phi(x)dx = \phi(x_0)$$

در انتگرال زير داريم:

$$\int_0^{\pi/2}\delta(t\sin\varphi - t\sin\alpha)\sin\varphi d\varphi = \int_0^{\pi/2}\frac{\delta(\varphi-\alpha)}{t\cos\alpha}\sin\varphi d\varphi = \frac{\sin\alpha}{t\cos\alpha} \qquad (۱۰۹\text{-}٤)$$

از $a = t\sin\alpha$ ، نتيجه مي گيريم:

$$\frac{\sin\alpha}{t\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{t\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{a}{t\sqrt{t^2-a^2}},$$

بنابراين انتگرال (٤-۱۰۷) به حالت زير در مي آيد

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\alpha} f_1'(t\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi/2} f_2'(t\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi + [f_2(a)-f_1(a)]\frac{a}{t\sqrt{t^2-a^2}}\right\}.$$

اگر در مثال بالا $f(s)$ ، به صورت زير تعريف شود

$$f(s) = \begin{cases} 1, & 0 \le s \le a \\ 2, & s > a \end{cases}$$

خواهيم داشت:

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\frac{a}{t\sqrt{t^2-a^2}}.$$

مثال٤. معادله انتگرال زير را حل كنيد

$$s\int_s^{+\infty}\frac{g(t)dt}{\sqrt{t^2-s^2}} = f(s) = \begin{cases} f_1(s), & 0 \le s < a \\ f_2(s), & a < s < +\infty \end{cases} \qquad f_1(a) \ne f_2(a) \qquad (۱۱۰\text{-}٤)$$

حل:

$$\int_s^{\infty}\frac{g(t)dt}{(t^2-s^2)^{1/2}} = \frac{f(s)}{s} \Rightarrow g(t) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^{\infty}\frac{2s.\frac{f(s)}{s}}{(s^2-t^2)^{1/2}}ds,$$

$$g(t) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^{\infty}\frac{f(s)ds}{(s^2-t^2)^{1/2}} \qquad (۱۱۱\text{-}٤)$$

با تغيير متغير $s = t\sec\varphi$ ، رابطه (٤-۱۱۱) به صورت زير در مي آيد

$$g(t) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi/2}\frac{f(t\sec\varphi).t\sec\varphi.\tan\varphi d\varphi}{t\tan\varphi}$$

$$g(t) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi/2} f(t\sec\varphi)\sec\varphi d\varphi \qquad (۱۱۲\text{-}٤)$$

با استفاده از مشتق قاعده لايب نيتز در رابطه (٤-۱۱۲) داريم:

$$g(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f'(t\sec\varphi)\sec^2\varphi d\varphi \qquad (۱۱۳\text{-}٤)$$

تابع $f(s)$ را بر حسب توابع $f_1(s)$ و $f_2(s)$ مي نويسيم

$$f(s) = f_1(s)\big(1 - H(s-a)\big) + f_2(s)H(s-a) \qquad (۱۱۴\text{-}۴)$$

از طرفين رابطه (۴-۱۱۴) نسبت به s مشتق مي گيريم

$$f'(s) = f_1'(s)\big(1 - H(s-a)\big) - f_1(a)\delta(s-a) + f_2'(s)H(s-a) + f_2(a)\delta(s-a) \quad (۱۱۵\text{-}۴)$$

با جايگذاري $s = t\sec\varphi$ و $a = t\sec\alpha$ در رابطه (۴-۱۱۵) داريم:

$$\begin{aligned} f'(t\sec\varphi) &= f_1'(t\sec\varphi)\big(1 - H(t\sec\varphi - t\sec\alpha)\big) + f_2'(t\sec\varphi)H(t\sec\varphi - t\sec\alpha) \\ &\quad + \big[f_2(a) - f_1(a)\big]\delta(t\sec\varphi - t\sec\alpha) \qquad (۱۱۶\text{-}۴) \end{aligned}$$

پس از ضرب طرفين رابطه (۴-۱۱۶) در $-\dfrac{2}{\pi}\sec^2\varphi$ در فاصله $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ انتگرال مي گيريم

$$g(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f'(t\sec\varphi)\sec^2\varphi\, d\varphi$$

$$\begin{aligned} g(t) = &-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f_1'(t\sec\varphi)\big(1 - H(t\sec\varphi - t\sec\alpha)\big)\sec^2\varphi\, d\varphi \\ &-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f_2'(t\sec\varphi)H(t\sec\varphi - t\sec\alpha)\sec^2\varphi\, d\varphi \\ &-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \big[f_2(a) - f_1(a)\big]\delta(t\sec\varphi - t\sec\alpha)\sec^2\varphi\, d\varphi. \qquad (۱۱۷\text{-}۴) \end{aligned}$$

با استفاده از اتحاد تابع دلتاي ديراك داريم:

$$\delta(t\sec\varphi - t\sec\alpha) = \frac{1}{t\sec\alpha\tan\alpha}\delta(\varphi - \alpha)$$

لذا

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \delta(t\sec\varphi - t\sec\alpha)\sec^2\varphi\, d\varphi &= \frac{1}{t\sec\alpha\tan\alpha}\int_0^{\pi/2}\delta(\varphi-\alpha)\sec^2\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{1}{t\sec\alpha\tan\alpha}\sec^2\alpha = \frac{\sec\alpha}{t\tan\alpha} \qquad (۱۱۸\text{-}۴) \end{aligned}$$

و بنا به فرض $\sec\alpha = \dfrac{a}{t}$ ، مي توان رابطه (۴-۱۱۸) را به صورت زير نوشت:

$$\int_0^{\pi/2} \delta(t\sec\varphi - t\sec\alpha)\sec^2\varphi\, d\varphi = \frac{a/t}{t\sqrt{(a/t)^2 - 1}} = \frac{a}{t\sqrt{a^2 - t^2}} \qquad (۱۱۹\text{-}۴)$$

با جايگذاري رابطه (۴-۱۱۹) در رابطه (۴-۱۱۷) تابع $g(t)$ بدست مي آيد

$$g(t) = -\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\alpha} f_1'(t\sec\varphi)\sec^2\varphi\, d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi/2} f_2'(t\sec\varphi)\sec^2\varphi\, d\varphi + \big[f_2(a) - f_1(a)\big]\frac{a}{t\sqrt{a^2 - t^2}}\right\}.$$

ضمیمه ۱

جدولي از خاصيت كلي از تبديل لاپلاس

	$f(t)$	$F(s)=L\{f(t);s\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
1.	$\int_0^t\ldots\int_0^t f(x)dx^n=\int_0^t\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}f(x)dx$	$\frac{F(s)}{s^n}$
2.	$\int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(s)G(s)$
3.	$\frac{\cos 2\sqrt{xt}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-x/s}$
4.	$\frac{\sin 2\sqrt{xt}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{s^{3/2}}e^{-x/s}$
5.	$\left(\frac{t}{x}\right)^{n/2}J_n(2\sqrt{xt})$	$\frac{1}{s^{n+1}}e^{-x/s},\quad n>-1$
6.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4t})$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-x\sqrt{s}}$
7.	$\frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp(-\frac{x^2}{4t})$	$e^{-x\sqrt{s}}$
8.	$erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1-e^{-x\sqrt{s}}}{s}$
9.	$erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s}e^{-x\sqrt{s}}$
10.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\exp(-\frac{x^2}{4t})\varphi(x)dx$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\Phi\left(\sqrt{s}\right)$
11.	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{xt})\varphi(t)dt$	$\frac{1}{s}\Phi\left(\frac{1}{s}\right)$
12.	$\int_0^\infty\left(\frac{x}{t}\right)^{n/2}J_n(2\sqrt{xt})\varphi(t)dt$	$\frac{1}{s^{n+1}}\Phi\left(\frac{1}{s}\right)$
13.	$\int_0^t J_0\left(2\sqrt{xt-x}\right)\varphi(x)dx$	$\frac{1}{s^2+1}\Phi\left(s+\frac{1}{s}\right)$
14.	$\frac{1}{a^{2n+1}\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty u^n\exp(-\frac{u^2}{4a^2t})J_{2n}(2\sqrt{u})du$	$\frac{1}{s^{n+1}}e^{-a/\sqrt{s}},\quad n>-1$
15.	$\delta(t-a)$	e^{-as}
16.	$H(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$

ضمیمه ۲

جدول معکوس تبدیل لاپلاس

	$F(s)$	$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$
1.	e^{-as}	$\delta(t-a)$
2.	$\dfrac{e^{-as}}{s}$	$H(t-a)$
3.	$\dfrac{e^{-as}}{s^{1/2}}$	$\begin{cases} 0 & ,t<a \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{t-a}} & ,t>a \end{cases}$
4.	$\dfrac{e^{-as}}{s^{\nu}}$	$\dfrac{(t-a)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \quad t>a$
5.	$\dfrac{e^{-as}}{s+b}$	$e^{-b(t-a)}, \quad t>a$
6.	$\dfrac{e^{-as}}{s(s+b)}$	$\dfrac{1}{b}\left(1-e^{-b(t-a)}\right), \quad t>a$
7.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$	$e^{b(bt+a)}erfc\left(b\sqrt{t}+\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$