# فصل چهارم

## مدل E. O. Q در حالت مجاز بودن کمبود

- ***مقدمه***
- ***مدل تقاضای پس‌افت***
- ***حالت فروش ار دست رفته***
- ***تمرین***

## ۱-۴ مقدمه

در مدلی که در فصل سوم ارائه گردید، تمامی تقاضاها از موجودی ذخیره شده قابل تامین بودند، یعنی هنگامیکه تقاضا می‌رسید، سیستم هیچگاه خالی از موجودی نبود. اینک حالت کلی‌تری را مطالعه می‌کنیم که در آن تمامی تقاضاها باید نهایتاً تامین گردند، لیکن برای سیستم مجاز است که وقتی تقاضا می‌رسد خالی از موجودی باشد. در چنین مواردی تامین تقاضاهای رسیده در موقع خالی بودن انبار از ذخیره به تاخیر می‌افتد تا زمانی که کالای خریداری شده برسد. زمانی که کالای سفارش داده شده می‌رسد فرض می‌شود که تمامی تقاضاهای تاخیر شده، قبل از آنکه این کالا بتواند برای تامین سایر تقاضاها مورد استفاده قرار گیرد، تامین می‌گردند. واضح است که اگر هیچ هزینه‌ای مربوط به تحمیل تقاضاهای تاخیر شده وجود نداشته باشد، حالت بهینه آن است که هیچگاه موجودی در دست وجود نداشته باشد. از سوی دیگر اگر هزینه تقاضاهای تاخیر شده زیاد باشد، نباید هیچ مقدار از آن را تحمیل کرد. هدف این فصل محاسبه مقداری از سفارش است که مجموع هزینه‌های کمبود و نگهداری در حداقل خود باشد. در این فصل در دو حالت تقاضای پس‌افت و فروش ازدست رفته مدل EOQ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۲-۴ مدل تقاضای پس‌افت

در این حالت کمبود موجودی جایز است ولی بالاخره بایستی تمام تقاضاها براورده شوند. تقاضاهایی که با کمبود موجودی مواجه می‌شوند با یکدیگر جمع شده و تقاضای پس‌افت را تشکیل می‌دهند. وقتی که سفارش به انبار می‌رسد، قبل ازاینکه تقاضای دیگری برآورده شود، ابتدا تقاضاهای پس‌افتاده برآورده می‌شوند. بدیهی است که اگر تقاضاهای پس‌افتاده هزینه‌ای دربر نداشته باشند، آنوقت روش بهینه این است که هرگز موجودی در دست از صفر بیشتر نشود. از طرف دیگر اگر این هزینه خیلی گران ($\infty$) باشد، آنوقت هرگز نباید این هزینه را تحمل نمود (مدل ساده E.O.Q). ولی اگر هزینه تقاضای پس‌افتاده بین این دو مرز باشد، روش بهینه این است که مقداری تقاضای پس‌افتاده در انتهای دوره T وجود داشته باشد. در تطابق با آنچه که در فصل دوم مورد بحث قرار گرفت، فرض می‌کنیم که هزینه یک تقاضای تاخیر شده به صورت $\pi + \hat{\pi}t$ باشد، که t طول زمانی است که برای آن تقاضای تاخیر شده وجود دارد. بدین ترتیب، هزینه هر واحد تقاضای پس‌افتاده شامل یک هزینه ثابت $\pi$ و یک هزینه $\hat{\pi}t$ می‌باشد که متناسب با طول زمانی است که برای آن تقاضای تاخیر شده وجود دارد.

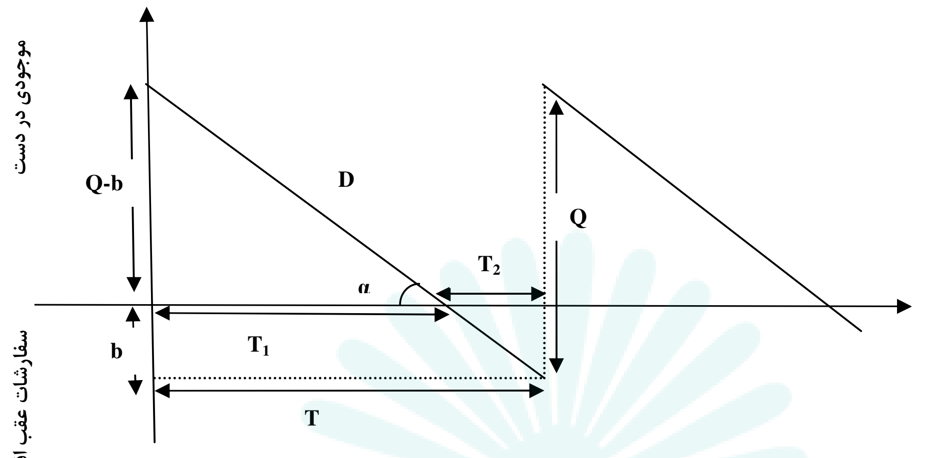
همانگونه که در شکل ۱-۴ نشان داده شده است، در پایان دوره $T_1$ موجودی کالا به صفر رسیده است. ولی تقاضا برای مصرف کالا همچنان وجود داشته و در نتیجه در فاصله زمانی $T_2$ انبار با کمبود کالا مواجه بوده و به اندازه b کمبود ایجاد شده است. در انتهای دوره سفارش، T، با رسیدن کالا، مقدار b واحد کمبود از کالای دریافت شده به به مصرف کننده تحویل شده است، (کمبود جبران شده است)، و در نتیجه مقدار کالایی که به انبار وارد شده است برابر با Q-b می‌باشد. این مقدار کالای وارد شده به انبار را با $I_{max}$ نشان می‌دهیم. در این مدل:

$T_2$: مدت زمانی از یک دوره که کمبود رخ می‌دهد.

$T_1$: مدت زمان یک دوره که در حالت کمبود نیستیم.

b: مقدار هربار کمبود.

$Tc_b$: کل هزینه‌های کمبود موجودی در سال[1]،
سایر پارامترها مانند مدل E.O.Q می‌باشد. هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه، $Q^*$، مقدار کمبود بهینه در هر دوره، $b^*$، و $r^*$ و $r^*_h$ همراه با کمینه کردن هزینه‌ها می‌باشد.




**شکل ۱-۴ موجودی خالص در حالت تقاضای پس‌افت**

با توجه به شکل ۱-۴ می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$D = tan\alpha = \frac{Q-b}{T_1} \rightarrow T_1 = \frac{Q-b}{D} \qquad (4\text{-}1)$$

$$D = tan\alpha = \frac{b}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{b}{D} \qquad (4\text{-}2)$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{Q}{D} \qquad (4\text{-}3)$$

(4-4) هزینه خرید +هزینه کمبود +هزینه نگهداری +هزینه سفارش‌دهی =هزینه یک دوره

(4-5) واحد هزینه نگهداری * میانگین موجودی مثبت در یک دوره =هزینه نگهداری

(4-6) واحد هزینه مواجهه با کمبود * میانگین موجودی منفی (کمبود)=هزینه کمبود

$$Tc = A + h\frac{(Q-b)T_1}{2} + \hat{\pi}\frac{bT_2}{2} + \pi b + CQ, \qquad (4\text{-}7)$$

$$\text{متوسط مقدار دوره ها در سال} = \frac{D}{Q} = \frac{1}{T} \qquad (4\text{-}8)$$

متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی $Tc\,(Q,b) = N \times \Big($هزینه یک دوره$\Big)$

$$= \frac{AD}{Q} + \frac{h(Q-b)^2}{2Q} + \frac{\hat{\pi} b^2}{2Q} + \frac{\pi D}{Q} b + CD \qquad (4\text{-}9)$$

برای بدست آوردن $Q^*$ و $b^*$ باید از تابع هزینه متغیر Tc(Q, b) نسبت به Q و b مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم و معادلات مربوطه را حل کنیم.

[1]. Total Slack Cost

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta Tc(Q,b)}{\delta b}&=0,\\ \frac{\delta Tc(Q,b)}{\delta Q}&=0\end{aligned}\right\}\overset{\hat{\pi}\neq 0}{\Longrightarrow}\begin{cases}Q^*=\sqrt{\dfrac{2AD}{h}-\dfrac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}}\sqrt{\dfrac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} & (4-10)\\ b^*=\dfrac{\sqrt{2ADh\left(1+\frac{h}{\hat{\pi}}\right)-\frac{h}{\hat{\pi}}(\pi D)^2}-\pi D}{\hat{\pi}+h}=\dfrac{hQ^*-\pi D}{\hat{\pi}+h} & (4-11)\end{cases}$$

از تابع هزینه می‌توان روابط زیر را بدست آورد:

$$\text{متوسط موجودی در یک سال}=\frac{D}{Q}\times\left(\frac{(Q-b)T_1}{2}\right)=\frac{D}{Q}\times\left(\frac{(Q-b)}{2}\times\frac{Q-b}{D}\right)=\frac{(Q-b)^2}{2Q} \qquad (4\text{-}12)$$

$$\text{متوسط کمبود در سال}=\frac{D}{Q}\times\left(\frac{bT_2}{2}\right)=\frac{D}{Q}\times\left(\frac{b}{2}\times\frac{b}{D}\right)=\frac{b^2}{2Q} \qquad (4\text{-}13)$$

$$\text{تعداد کمبود در سال}=\frac{D}{Q}b \qquad (4\text{-}14)$$

- ✓ در فرمول (۱۰-۴) چنانچه هزینه وابسته به زمان مواجهه با کمبود، ($\hat{\pi}$)، عدد بزرگی باشد، مقدار $\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}$ به سمت یک نزدیک شده و نهایتاً در صورتیکه $\hat{\pi}$ برابر با بی‌نهایت باشد، مقدار اقتصادی سفارش با EOQ در شرایط مجاز نبودن مواجهه با کمبود برابر خواهد شد[1].

### ۴-۱-۱ الگوریتم حل

الگوریتم حل مسائل کمبود پس‌افت با توجه به مقایسه دو هزینه $\sqrt{2ADh}$ و $\pi D$ به صورت زیر می‌باشد:

**حالت اول:** اگر $D\pi \geq \sqrt{2ADh}$ در این حالت ترجیح می‌دهیم که کمبود نداشته باشیم و مدل همانند E.O.Q خواهد بود، یعنی

$Q^*=Q_w$ و $Tc(Q^*)=Tc(Q_w)$ و $b^*=0$

**حالت دوم:** اگر $D\pi < \sqrt{2ADh}$ در این صورت می‌توان دو حالت زیر را بررسی کرد:

- اگر $\hat{\pi}=0$ باشد، در این حالت سیستم موجودی وجود ندارد و
  $Q^*=0,\ b^*=\infty,\ Tc(Q^*)=\pi D$

که عموماً درست نیست. بطور کلی، معنی این رابطه این است که اگر $\hat{\pi}=0$ باشد، جوابی برای b در فاصله $0<b<\infty$ وجود ندارد. به عبارت دیگر، جواب بهینه در مرز است، یعنی یا $b=0$ یا $b=\infty$. بنابراین برای این کار فقط لازم است که هزینه‌های مربوطه برحسب Q را مقایسه نمود. وقتی $b=0$ باشد، مدل به مدل E.O.Q برمی‌گردد و مقدار بهینه Q همان $Q_w$ و هزینه بهینه نیز برابر $Tc_w$ خواهد بود. هنگامیکه $b=\infty$ شود، هرگز سفارشی داده نمی‌شود و هزینه کمینه سالیانه عبارت است از $\pi D$. معنی این امر این است که در واقعیت سیستم موجودی نبایستی وجود داشته باشد، و بهتر است که هزینه تقاضای پس‌افتاده را سال به سال تحمل نمود.

- اگر $\hat{\pi}>0$: در اینصورت:

$$Q^*=\sqrt{\frac{2AD}{h}-\frac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}},\qquad b^*=\frac{hQ^*-\pi D}{\hat{\pi}+h}$$

[1] . مفهوم مجاز نبودن مواجهه با کمبود آن است که هزینه‌های مواجهه با کمبود بی‌نهایت زیاد است.

### ۴-۱-۲ حالت خاص مدل کمبود پس‌افت

مدل کمبود پس‌افت حالت خاصی دارد که مسائل موجودی عموماً براساس این حالت مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرند. در این حالت $\pi=0$ و $\hat{\pi} > 0$ است و بنابراین حالت خاصی از قسمت دوم است. روابط در این حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = Q_W\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \tag{4-15}$$

$$b^* = \frac{hQ^*}{\hat{\pi}+h} = \sqrt{\frac{2ADh}{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}} = \frac{hQ_W}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}} \tag{4-16}$$

$$I^*_{max} = Q^* - b^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} = Q_W\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} = \frac{Q^*\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h} \tag{4-17}$$

$$Tc^* = \sqrt{2ADh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} = hI^*_{max} = \hat{\pi}b^* \tag{4-18}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، مقدار $b^* > 0$ است. مگر اینکه $\hat{\pi} = \infty$ باشد. یعنی تحت شرایط بهینه همیشه مقداری تقاضای پس‌افتاده وجود دارد.

### ۴-۱-۳ محاسبه نقطه سفارش مجدد

محاسبه نقطه سفارش برای این مدل، در اصل مانند مدل ساده موجودی می‌باشد. ولی در اینجا ممکن است موقع سفارش دادن، موجودی در دست صفر باشد و درعوض مقداری تقاضای پس‌افتاده وجود داشته باشد. بنابراین در حالت تقاضای پس‌افتاده نقطه سفارش برحسب موجودی خالص یا برحسب موقعیت موجودی بیان می‌دارند. بنابراین:

نقطه سفارش، برحسب موجودی خالص، موقعی است که $r^*_h = DL - mQ^* - b^*$ باشد. مانند مدل ساده، m بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی L/T است. ممکن است $r^*_h$ منفی باشد، یعنی موقع سفارش دادن زمانی است که مقدار تقاضای پس‌افتاده به سطح $|r^*_h|$ برسد. نقطه سفارش برحسب موقعیت موجودی، زمانی است که $r^* = DL - b^*$ باشد. $r^*$ نیز ممکن است منفی باشد.

**مثال ۱-** محصولی که دارای مشخصات زیر است را درنظر بگیرید:

تقاضا (نرخ مصرف)، D: ۲۰۰ واحد در سال،

قیمت هر واحد، C: ۲۵ تومان،

نرخ هزینه نگهداری، i: ۰/۲ در سال،

هزینه سفارش‌دهی، A : ۵ تومان،

موعد تحویل، LT: ۹ ماه،

هزینه مستقل هر واحد کمبود ، $\pi$: ۰/۲ تومان برای هر واحد،

هزینه وابسته به زمان هر واحد تقاضای پس‌افت، $\hat{\pi}$: ۱۰ تومان برای هر واحد در سال.

مطلوبست:

الف- مقدار بهینه کمبود:

ب- زمان بهینه بین دو سفارش:

ج- نقطه سفارش برحسب موقعیت موجودی:

د- نقطه سفارش برحسب موجودی خالص:

**پاسخ:**

$$h = ic = 0.2 \times 25 = 5$$
$$\pi D = 0.2 \times 200 = 40,\ \ \sqrt{2ADh} = \sqrt{2 \times 5 \times 200 \times 5} = 100 \rightarrow\ \ \pi D < \sqrt{2ADh}$$

**الف-**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h} - \frac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 200}{5} - \frac{(40)^2}{5(10+5)}}\sqrt{\frac{10+5}{10}} = 23.83 \cong 24$$
$$b^* = \frac{hQ^* - \pi D}{\hat{\pi}+h} = \frac{5(23.83) - 40}{10+5} = 5.27$$

**ب-**

$$\mathrm{T}^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{23.83}{200} \cong 0.12 \text{ سال}$$

**ج-**

$$\mathrm{r}^* = \mathrm{DL} - \mathrm{b}^* = 200\left(\frac{9}{12}\right) - 5.27 = 144.73$$

**د-**

$$\mathrm{r}_\mathrm{h}^* = \mathrm{DL} - \mathrm{mQ}^* - \mathrm{b}^* = 200\left(\frac{9}{12}\right) - \left[\frac{\frac{9}{12}}{\frac{23.83}{200}}\right] \times 23.83 - 5.27 = 1.75$$

**مثال۲-** مصرف یک قطعه خاص در کارخانه‌ای به میزان ۲۴۰۰۰ عدد در ماه تخمین زده می‌شود. هزینه هر بار سفارش این قطعه ۹۵۰۰۰ واحد پول و هزینه نگهداری هر یک عدد از این قطعه در انبار، ۵۰ واحد پول در ماه است. واحد هزینه مواجهه با کمبود این قطعه ۲۵۰ واحد پول به ازاء هر یک قطعه کمبود در ماه است. قطعات در بسته‌های ۱۲ عددی قابل سفارش هستند. مطلوبست:

الف- محاسبه مقدار اقتصادی سفارش این قطعه در ماه.

ب- در شرایطی که این قطعه همواره به مقدار اقتصادی سفارش شود سطح موجودی مثبت انبار و سطح کمبود به چه اعدادی خواهند رسید؟

ج- محاسبه هزینه‌های ماهیانه نگهداری، سفارش‌دهی، کمبود و هزینه کل موجودی‌ها در شرایط اقتصادی.

**پاسخ:**

$$h = 50 \text{ واحد پول/ ماه}\ ,\ A = 95000 \text{ واحد پول}\ ,\ D = \frac{24000\text{عدد}}{\text{ماه}}\ ,\ \hat{\pi} = 250\ ,\ \pi = 0$$

**الف-**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = \sqrt{\frac{2(95000)(24000)}{50}}\sqrt{\frac{250+50}{250}} \cong 10461.36 \text{ عدد}$$

با توجه به اینکه قطعات در بسته‌های دو جینی (۱۲ عددی) قابل سفارش هستند، مناسب است هر بار به تعداد $\frac{10461.36}{12} = 872$ بسته (۱۰۴۶۴ عدد) سفارش صادر شود.

ب-

$$\text{سطح موجودی منفی انبار} = b^* = \frac{hQ^*}{\hat{\pi}+h} = \frac{50(10464)}{250+50} = 1744$$

$$\text{سطح موجودی مثبت انبار} = I^*_{max} = \frac{Q^*\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h} = \frac{10464\times 250}{250+50} = 8720$$

ج-

$$TC_h = h\times\frac{(Q^*-b^*)^2}{2Q^*} = 50\left[\frac{(10464-1744)^2}{2(10464)}\right] = 181666.67 \quad \text{واحد پول در ماه}$$

$$TC_b = \hat{\pi}\frac{{b^*}^2}{2Q^*} = 250\left[\frac{(1744)^2}{2(10464)}\right] = 36333.33 \quad \text{واحد پول در ماه}$$

$$TC_s = A\frac{D}{Q^*} = 95000\frac{24000}{10464} = 217889.9 \quad \text{واحد پول در ماه}$$

$$Tc^* = \sqrt{2ADh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} = TC_h + TC_b + TC_s = 435889.9$$

✓ در مثال ۲، توجه داشته باشیم در صورتیکه در محاسبات هزینه از عدد $Q^*$ به صورت محاسبه شده و گرد نشده استفاده کنیم، آن گاه جمع هزینه‌های نگهداری و کمبود با هزینه‌های سفارش‌دهی برابر خواهد شد. به عبارت دیگر، $Tc_h + Tc_b = Tc_s$. این امر همواره در مدل‌های کمبود مجاز صادق خواهد بود، به این شرط که در هزینه‌های نگهداری، آن بخش از هزینه‌ها که مربوط به نگهداری ذخیره اطمینان است منظور نشود.

### ۴-۱-۴ خواص مدل

مقایسه مدل کمبود پس‌افت (حالت خاص) با مدل EOQ

۱. مقدار سفارش بهینه در مدل پس‌افت بیشتر از مدل EOQ است.

۲. حداکثر موجودی در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.

۳. هزینه‌های متغیر در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.

**مثال ۳**- تقاضای سالانه قطعه‌ای ۸۰۰۰ واحد، هزینه سفارش ۳۰ واحد پولی، هزینه نگهداری سالانه هر قطعه برابر ۳ واحد پولی می‌باشد. اگر کمبود مجاز باشد و هزینه هر قطعه‌ای که با تاخیر تحویل می‌شود، برابر ۱ واحد پولی در سال محاسبه شود، معین کنید هزینه متغیر سالانه این قطعه را (هزینه نگهداری+ هزینه سفارش‌دهی+ هزینه کمبود).

**پاسخ:**

$$D=8000,\ \ A=30,\ \ h=3,\ \ \hat{\pi}=1$$

$$Tc^* = \sqrt{2ADh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} = \sqrt{2(8000)(30)(3)}\sqrt{\frac{1}{1+3}} = 600$$

**مثال ۴**- مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) را درنظر بگیرید. حال فرض کنید کمبود کالا مجاز و قابل جبران باشد و هزینه کمبود تنها به صورت متغیر (وابسته به زمان) محاسبه شود. دراین صورت به ترتیب

مقدار بهینه (سفارش اقتصادی، حداکثر فضای انبار موردنیاز، متوسط هزینه کل سالانه) نسبت به زمانی که کمبود مجاز نباشد:

الف- به ترتیب (بیشتر، کمتر، کمتر) است. ب- به ترتیب (کمتر، بیشتر، بیشتر) است.

ج- به ترتیب (بیشتر، بیشتر، کمتر) است. د- به ترتیب (بیشتر، کمتر، بیشتر) است.

**پاسخ:**

با توجه به توضیحات متن گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

**مثال ۵-** مصرف سالیانه مواد اولیه در شرکت تولیدی ۲۰۰۰ تن و هزینه سفارش‌دهی آن برابر ۲۰۰۰ تومان و قیمت هر تن از این مواد ۱۰۰ تومان و هرینه نگهداری هر تن ۰/۵ تومان در ماه و هزینه بیمه و آتش‌سوزی و ... برابر ۲ درصد متوسط موجودی‌ها در سال می‌باشد. اگر هزینه کمبود هر تن از این مواد ۴ تومان باشد، مقدار سفارش اقتصادی این کالا را بدست آورید.

**پاسخ:**

$$D = 2000\,,\quad A = 2000\,,\quad C = 100\,,\quad i = 0.02\,,\quad \pi = 4\,,$$

$$h_1 = 0.5\frac{\text{تومان}}{\text{ماه}}0.5 \times 12 = 6\frac{\text{تومان}}{\text{سال}}\,,\quad h_2 = i \times C = 0.02 \times 100 = 2$$

$$\rightarrow h = h_1 + h_2 = 6 + 2 = 8$$

$$\xrightarrow{\left\{\begin{smallmatrix}\sqrt{2ADh}=\sqrt{2\times2000\times2000\times8}=8000\\ \pi D=4\times2000=8000\end{smallmatrix}\right.} EOQ\ \text{مدل}$$

$$\rightarrow Q^* = Q_w = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 2000}{8}} = 1000$$

**مثال ۶-** در یک سیستم موجودی با نرخ ثابت، و در حالتی که کمبود موجودی مجاز نمی‌باشد، میزان سفارش اقتصادی کالایی برابر ۲۸۱۴/۲ تن و نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) برابر ۶۳۴۶/۱۵ تن محاسبه شده است.چنانچه کمبود مجاز باشد و هزینه مربوط بر مبنای هزینه کمبود واحد کالا در سال در محاسبات منظور شود، میزان سفارش اقتصادی ۳۴۷۶/۸ تن محاسبه می‌شود. برای این حالت نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) محاسبه نمایید.

**پاسخ:**

برای حالت EOQ:

$$Q_w^2 = 28142.2\,,\quad r^* = 6346.15$$

برای حالت کمبود:

$$Q^*_{\text{کمبود}} = 3476.8\,,\quad r^* = ?$$

برای بدست آوردن مقدار $b^*$ دو روش وجود دارد:

روش اول:

$$Q^*_{\text{کمبود}} = Q^*_{EOQ}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \quad \rightarrow \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = \frac{3476.8}{2814.2} \quad \rightarrow 1+\frac{h}{\hat{\pi}} = 1.526 \quad \rightarrow \frac{h}{\hat{\pi}} = 0.526$$

$$b^* = \frac{hQ_w}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}} = \frac{h}{\hat{\pi}} \times \frac{Q_w}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}} = 0.526 \times \frac{2814.2}{1.235} = 1198$$

روش دوم:

$$Q^*_{\text{کمبود}} = Q^*_{EOQ}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \quad \rightarrow \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = \frac{3476.8}{2814.2} = 1.235$$

$$I^{\text{کمبود}}_{max} = Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = \frac{2814.2}{1.235} = 2278.7$$

$$b^* = Q^*_{\text{کمبود}} - I^*_{\max\,\text{کمبود}} = 3476.8 - 2278.7 = 1198.1$$

مقدار $r^*$ با در نظر گرفتن کمبود بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r^*_{\text{کمبود}} = r^*_{EOQ} - b^* = 6346.15 - 1198 = 5148.15$$

## ۴-۲ حالت فروش ار دست رفته

در این حالت تقاضاهایی که با کبود روبرو می‌شوند هرگز برآورده نخواهند شد. بنابراین بـه هنگـام دریافت مواد سفارش داده شده، تمامی مواد به انبار جهت تقاضاهای آتی منتقل می‌شوند. دراین مدل مقدار درآمد سالیانه بستگی به طول زمانی دارد که سیستم خالی از موجودی اسـت و بنـابراین مسـتقل از خـط مشی سیستم موجودی نمی‌باشد. بنابراین نمی‌توانیم مانند حالات قبل بلافاصله نتیجه بگیـریم کـه بیشـینه نمودن سود سالیانه همان خط مشی را می‌دهد که کمینه کردن هزینه سالیانه بدسـت خواهـد داد. بـا ایـن وجود، ما در اینجا با تعریف مناسبی از هزینه کمبود، نشان خواهیم داد کـه کمینـه کـردن هزینـه متوسـط سالیانه همان نتایجی را می‌دهد که بیشینه کردن سود سالیانه خواهد داد. فرض کنید:

C: قیمت فروش هر واحد،

P: متوسط سود سالیانه،

$\pi_0$: هزینه هر کمبود (به غیر از سود از دست رفته هر واحد)،

$f_0$: کسری از زمان که سیستم خالی از موجودی باشد:

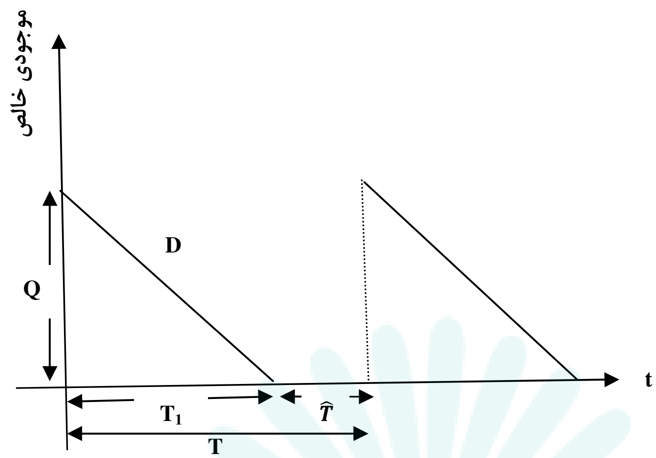
در اینصورت، مقدار سود سالیانه برابر است با:

$$p = D(C-A)(1-f_0) - \pi_0 Df_0 - \left(\text{هزینه نگهداری سالیانه + هزینه سفارش سالیانه}\right) \quad (4\text{-}19)$$

$$= D(C-A) - (\pi_0 + C - A)Df_0 - \left(\text{هزینه نگهداری سالیانه + هزینه سفارش سالیانه}\right) \quad (4\text{-}20)$$

واضح است که D(C-A) مقدار سود سالیانه حاصل از فروش D واحد برای حالتی است کـه سیسـتم بـدون کمبـود موجـودی باشـد، بـه عـلاوه ایـن مقـدار مسـتقل از خـط مشـی سیسـتم مـی‌باشـد. بنـابراین اگـر $\pi = \pi_0 + c - A$، بطوریکه $\pi$ شامل هزینه کمبود یک واحد به اضافه سود از دست رفته یک واحد باشد، و $\pi$ را در متوسط هزینه سالیانه، هزینه یک واحد فروش از دست رفته درنظـر بگیـریم، آنگـاه کمینـه کـردن متوسط هزینه سالیانه همان خط مشی را می‌دهد که بیشینه کردن سود سالیانه خواهد داد، چون دو رابطـه (۴-۱۹) و (۴-۲۰) در جمله D(C-A)، که مستقل از خط مشی است با هم تفاوت دارند.

نمودار موجودی خالص برحسب زمان برای این مدل در شکل ۲-۴ آمده است.




**شکل ۲-۴ نمودار موجودی خالص برحسب زمان در حالت فروش از دست رفته**

باتوجه به شکل خواهیم داشت:

$T_1$: مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود نیستیم.

$\hat{T}$: مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود هستیم.

سایر پارامترها همچون مدل EOQ است.

$$\left.\begin{matrix} T = T_1 + \hat{T} \\ T_1 = \frac{Q}{D} \end{matrix}\right\} \to \ T = \frac{Q}{D} + \hat{T} = \frac{Q + D\hat{T}}{D} \qquad (4\text{-}21)$$

$$\text{متوسط مقدار دوره‌ها در سال} = N = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q + D\hat{T}} \qquad (4\text{-}22)$$

بنابراین هزینه متوسط سالیانه برابر است با:

$$\text{کل هزینه متغیر سالیانه} = Tc(Q, \hat{T}) = \frac{AD}{Q + D\hat{T}} + \frac{hQ^2}{2(Q + D\hat{T})} + \frac{\pi D^2 \hat{T}}{Q + D\hat{T}} + CQ\frac{D}{Q + D\hat{T}} \qquad (4\text{-}23)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، در این مدل هزینه خرید هم جزء هزینه‌های متغیر است. زیرا به برخی از تقاضاها اصلاً جواب نخواهیم داد. بنابراین، برای بدست آوردن $Q^*$ و $\hat{T}^*$ باید از تابع هزینه متغیر $Tc(Q,\hat{T})$ نسبت به Q و $\hat{T}$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم و معادلات مربوطه را حل کنیم.

$$\frac{\delta Tc(Q, \hat{T})}{\delta Q} = 0 \to \ -\frac{1}{(Q + D\hat{T})^2}\left[AD + \frac{hQ^2}{2} + \pi D^2 \hat{T}\right] + \frac{hQ}{Q + D\hat{T}}$$

$$= -AD + \frac{hQ^2}{2} - \pi D^2 \hat{T} + hQD\hat{T} = 0 \qquad (4\text{-}24)$$

$$\frac{\delta Tc\ (Q, \hat{T})}{\delta \hat{T}} = 0 \to \ -\frac{1}{(Q + D\hat{T})^2}\left[AD^2 + \frac{hDQ^2}{2} + \pi D^3 \hat{T}\right] + \frac{\pi D^2}{Q + D\hat{T}}$$

$$\pi D = \frac{AD}{Q} + \frac{h}{2}Q \qquad (4\text{-}25)$$

رابطه (۲۵-۴) را نسبت به Q حل کرده تا مقدار بهینه سفارش، $Q^*$، بدست آید:

$$Q = \frac{\pi D}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{\pi D}{h}\right)^2 - \frac{2AD}{h}} \tag{4-26}$$

سایر روابط در این حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{متوسط هزینه نگهداری در یک سیکل} = ic\frac{Q^2}{2D} \tag{4-27}$$

$$\text{متوسط هزینه نگهداری در سال} = \frac{D}{Q+D\hat{T}} \times ic\frac{Q^2}{2D} = \frac{icQ^2}{2(Q+D\hat{T})} \tag{4-28}$$

$$\text{متوسط تقاضای از دست رفته در هر سیکل} = D\hat{T} \tag{4-29}$$

$$\text{متوسط هزینه تقاضای از دست رفته در سال} = \pi \times \left(\frac{D}{Q+D\hat{T}}\right) \times D\hat{T} = \frac{\pi D^2\hat{T}}{Q+D\hat{T}} \tag{4-30}$$

$$\text{متوسط هزینه ثابت سفارش دادن در سال} = A \times \left(\frac{D}{Q+D\hat{T}}\right) = \frac{AD}{Q+D\hat{T}} \tag{4-31}$$

توجه شود که در این مدل $T = \frac{Q+D\hat{T}}{D}$ است ولی در تمام مدل‌های کنترل موجودی $T= Q/D$ می‌باشد.

### ۴-۲-۲ الگوریتم حل

اگر $(\pi D)^2 < 2ADh$ باشد، هیچ مقدار واقعی برای Q وجود ندارد که رابطه (۲۵-۴) را برقرار نماید، آنگاه مقداری برای $\hat{T}$ وجود ندارد که Tc را مینیمم نماید. بنابراین مقدار بهینه $\hat{T}$ بایستی صفر یا بی‌نهایت باشد. ولی از آنجا که شرط $(\pi D)^2 < 2ADh$ ایجاب می‌کند که هزینه فروش از دست رفته در تمامی زمان‌ها، کمتر از هزینه داشتن یک سیستم موجودی بدون فروش از دست رفته باشد، بنابراین مقدار بهینه $\hat{T}$ باید ∞ باشد. در نتیجه در این حالت نبایستی هیچگونه سیستم موجودی وجود داشته باشد.

اگر $(\pi D)^2 = 2ADh$ باشد، یک مقدار مثبت برای Q وجود دارد که در رابطه (۲۵-۴) صدق می‌کند. در این حالت هر مقداری برای $\hat{T}$ بهینه می‌باشد.

اگر $(\pi D)^2 > 2ADh$ باشد، دو مقدار مثبت برای Q وجود دارد که رابطه (۲۵-۴) را برقرار می‌کنند. چون در این حالت:

$$\frac{\pi D}{h} > \sqrt{\left(\frac{\pi D}{h}\right)^2 - \frac{2AD}{h}} \tag{4-32}$$

با جانشین کردن رابطه (۲۶-۴) در رابطه (۲۴-۴) و مرتب نمودن جملات رابطه (۳۳-۴) بدست می‌آید:

$$D\hat{T} = -\frac{\pi D}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{\pi D}{h}\right)^2 - \frac{2AD}{h}} \tag{4-33}$$

با توجه به رابطه (۳۲-۴) نتیجه می‌شود که برای هر دو علامت ±، $T < 0$ می‌باشد. بنابراین باز هم مقدار بهینه در فاصله $0 < \hat{T} < \infty$ برای $\hat{T}$وجود ندارد. چون $(\pi D)^2 > 2ADh$ است، یعنی هزینه داشتن سیستم بدون فروش از دست رفته ارزانتر است. در این حالت مقدار بهینه $\hat{T} = 0$ است.

آنچه در فوق بررسی گردید، نشان می‌دهد که اگر قرار باشد سیستم موجودی وجود داشته باشد، آنگاه در حالت بهینه نبایستی هرگز کمبود موجودی بوجود آید. حتی اگر فروش از دست رفته را در مدل درنظر بگیریم، در حالت $(\pi D)^2 > 2ADh$ جواب بهینه همان فرمول ویلسون خواهد بود. بنابراین به طور کلی دو حالت را برای این مدل می‌توان بیان کرد:

حالت اول: اگر $D\pi \geq \sqrt{2ADh}$ در این حالت ترجیح می‌دهیم که مانند مدل E.O.Q عمل کنیم، یعنی:

$Q^* = Q_w$, $Tc(Q^*) = Tc(Q_w)$, $\hat{T}^* = 0$

حالت دوم: اگر $D\pi < \sqrt{2ADh}$ در این حالت اصلاً مدلی برای سیستم کنترل موجودی وجود ندارد و ترجیح می‌دهیم همواره کمبود داشته باشیم، یعنی:

$Q^* = 0,\ Tc\,(Q^*) = \pi D,\quad \hat{T}^* = \infty$

### ۳-۲-۴ خواص مدل

۱. زمانی که کمبود کالا مجاز بوده و غیرقابل جبران باشد، مقدار کل هزینه سفارش به مقدار b بستگی ندارد و با تغییرات b مقدار $Q^*$ تغییری نخواهد کرد.
۲. در این مدل باتوجه به اینکه کمبود قابل جبران نبوده و پرداخت نمی‌شود، نقطه سفارش مجدد دقیقاً از روش EOQ در حالت مجاز نبودن کمبود حاصل می‌شود.
۳. مقدار سفارش بهینه در این مدل با مقدار سفارش بهینه در حالتی که کمبود مجاز نیست برابر است.

## ۳-۴ تمرین

۱. چه شرایطی لازم است وجود داشته باشد تا مقدار تولید اقتصادی در حالتی که کمبود مجاز است دو برابر وقتی باشد که کمبود مجاز نباشد؟

۱) هزینه کمبود هر واحد کالا دو برابر هزینه نگهداری هر واحد کالا باشد.

۲) هزینه نگهداری هر واحد کالا سه برابر هزینه کمبود هر واحد کالا باشد.

۳) هزینه کمبود هر واحد کالا برابر هزینه نگهداری هر واحد کالا باشد.

۴) هزینه نگهداری هر واحد کالا دو برابر هزینه کمبود هر واحد کالا باشد.

۲. مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) را درنظر بگیرید. حال فرض کنید کمبود کالا مجاز و قابل جبران باشد و هزینه کمبود تنها به صورت متغیر (وابسته به زمان) محاسبه شود. در اینصورت به ترتیب مقدار بهینه (سفارش اقتصادی، حداکثر فضای انبار مورد نیاز، متوسط هزینه کل سالانه) نسبت به زمانی که کمبود مجاز نباشد:

۱) به ترتیب (بیشتر، کمتر، کمتر) است.

۲) به ترتیب (کمتر، بیشتر، بیشتر) است.

۳) به ترتیب (بیشتر، بیشتر، کمتر) است.

۴) به ترتیب (بیشتر، کمتر، بیشتر) است.

۳. یک قطعه خریداری شده دارای نرخ تقاضای سالیانه ۴۰۰۰ واحد است. هزینه ثابت سفارش ۶۰ تومان بوده و هزینه هر واحد ۴ تومان می‌باشد. نرخ هزینه نگهداری موجودی سالیانه ۰/۱۵ است. کمبود موجودی مجاز بوده و بصورت سفارشات تاخیر شده درمی‌آیند. هزینه سالیانه هر واحدی که به تاخیر می‌افتد ۱ تومان است. اندازه انباشته اقتصادی و تعداد بهینه سفارشات تاخیر شده در هر سیکل را بدست آورید.

۴. در یک سیستم موجودی، تقاضا برای قطعه‌ای با نرخ ثابت و سالانه برابر ۵۶۰۰ قطعه می‌باشد. برای این قطعه با سیاست عدم کمبود موجودی، اندازه سفارش اقتصادی برابر ۴۰۰ واحد محاسبه شده است. اکنون بر این سیاست که کمبود موجودی مجاز می‌باشد، اندازه سفارش اقتصادی برابر ۵۶۰ واحد محاسبه گردیده است. برای حالت اخیر (مجاز بودن کمبود) نقطه سفارش مجدد را برحسب موجودی در دست محاسبه کنید (زمان تدارک (سفارش تا تحویل) دو ماه می‌باشد و از هزینه ثابت کمبود موجودی صرف‌نظر شده است).

۵. کمبود کالایی مجاز اما غیرقابل جبران است (فروش از دست رفته) با افزایش هزینه‌های کمبود این کالا چه تغییری در وضعیت موجودی‌ها به وجود خواهد آمد؟

۱) مقدار سفارش و کمبود هر دو افزایش اما حداکثر موجودی انبار کاهش می‌یابد.

۲) مقدار سفارش و حداکثر موجودی انبار هر دو ثابت باقی خواهند ماند.

۳) مقدار سفارش و کمبود هر دو افزایش می‌یابند اما حداکثر موجودی انبار ثابت باقی خواهد ماند.

۴) مقدار سفارش افزایش اما حداکثر موجودی انبار و میزان کمبود هر دو کاهش می‌یابند.

۶. واحد هزینه مواجهه با کسری (کمبود) را با نماد $C_s$ نشان می‌دهیم. در صورتی‌که مواجهه با کسری مجاز نباشد. در مدل‌های کنترل موجودی خواهیم داشت:

۱) $۰ \leq C_s \leq \infty$ ۲) $C_s = \infty$ ۳) $C_s = ۰$ ۴) $C_s > ۰$

۷. در یک مدل موجودی قطعی که در آن کسری مجاز است با درنظر گرفتن پارامترهای زیر:

$\pi$: هزینه یک واحد کسری

D: تقاضای سالیانه

$k_w$: مینیمم هزینه وقتی مقدار سفارش از رابطه EOQ بدست می‌آید.

خواهیم داشت:

۱) در هر دو حالت تقاضای پس‌افت و فروش از دست رفته اگر $\pi D < k_w$ باشد، سیستم موجودی وجود نخواهد داشت.

۲) در هر دو حالت تقاضای پس‌افت و فروش از دست رفته اگر $\pi D > k_w$ باشد، جواب بهینه فقط با مدل موجودی بدون کسری بدست می‌آید.

۳) در حالت تقاضای پس‌افت اگر $\pi D < k_w$ باشد، سیستم موجودی وجود نخواهد داشت.

۴) در حالت فروش از دست رفته اگر $\pi D > k_w$ باشد، سیستم موجودی وجود نخواهد داشت.

۸. مصرف سالیانه کالایی ۴۰۰۰ واحد، هزینه سفارش‌دهی ۴۰۰ تومان و هزینه نگهداری هر واحد ۴ تومان در سال می‌باشد. هزینه کمبود هر واحد ۲ تومان در سال برآورد شده است. به سوالات زیر پاسخ دهید؟

الف- اندازه سفارش اقتصادی را محاسبه کنید.

ب- هزینه سالیانه را بدست آورید.

ج- هزینه سالیانه نگهداری چقدر است.

د- میزان کمبود را بدست آورید.

ه- حداکثر موجودی را محاسبه کنید.

۹. نسبت مقدار سفارش اقتصادی در حالت کمبود به مقدار سفارش اقتصادی در حالت بدون کمبود (با درنظرگرفتن $C_h$ هزینه نگهداری و $C_s$ هزینه کمبود) را بدست آورید.