# فصل هفتم

## مدل‌های تخفیف

- ***مقدمه***
- ***مدل تخفیف نموی (افزایشی)***
- ***مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی در حالت تخفیف کلی***
- ***تمرین***

## ۱-۷ مقدمه

در تمامی مدل‌های مقدار سفارش اقتصادی که تاکنون مورد بررسی قرار گرفت، فرض بر این بوده است که قیمت کالا یا هزینه واحد (C) در طول افق برنامه‌ریزی ثابت و مستقل از مقدار سفارش (خرید یا تولید) است. اما در دنیای واقعی، همیشه این فرض صحیح نیست و فروشندگان کالا، جهت تشویق خریداران به سفارشات با حجم بیشتر، تخفیفی به ازاء سفارشات بالاتر از حدود معین شده درنظر می‌گیرند. . مثلاً وقتی مواد خریداری می‌شوند، ممکن است فروشنده مواد بسته به مقدار خرید، قیمت فروش هر واحد را تعدیل نماید و به صورت‌های مختلف برای خریدهای با حجم زیاد تحفیف قائل شود. گاهی اوقات نیز فروشنده ممکن است برای خریدهای با حجم زیاد جایزه‌ای به صورت مقدار کالای آزاد، اجازه تعویق پرداخت و ... درنظر بگیرد. این جایزه‌ها را معمولاً می‌توان به یک نرخ تخفیف معادل تبدیل نمود.

در تولید نیز گاهی اوقات هزینه تولید هر واحد بستگی به مقدار تولید دارد، این تفاوت هزینه ممکن است ناشی از روش‌های متفاوت تولید، مثلاً استفاده از وسایل متفاوتی برای تولید مقادیر زیاد، صرفه‌جویی در هزینه‌های بارگیری، بسته‌بندی، اداری و یا کاهش هزینه‌های کاغذبازی یا آماده‌سازی مربوط به سفارش باشد.

در این فصل مساله سیستم موجودی را در حالتی مدل می‌کنیم که هزینه هر واحد نسبت به میزان سفارش پویا است. این مدل‌ها در دو نوع مختلف تخفیف کلی و نموی (افزایشی) بررسی می‌شوند:

- **تخفیف کلی:** در این حالت تخفیف بر کل کالاها بصورت یکسان اعمال می‌شود. به عبارت دیگر در این حالت تمامی واحدهای خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری می‌شوند.
- **تخفیف نموی:** در این حالت تخفیف بر هر محدوده بصورت جداگانه اعمال می‌شود، به عبارت دیگر، در این حالت تمامی واحدهای خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری نمی‌شوند و تخفیف براساس مقادیر داخل محدوده تخفیف برای هر واحد محصول تعریف می‌شود.

کل هزینه خرید دو نوع تخفیف بصورت جدول ۱-۷ است:

**جدول ۱-۷ هزینه خرید در دو حالت تخفیف کلی و نموی**

| شماره محدوده | محدوده تخفیف | قیمت واحد کالا | کل هزینه خرید (تخفیف کلی) | کل هزینه خرید (تخفیف نموی) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $q_0 \le Q < q_1$ | $C_0$ | $C_0 Q$ | $C_0 Q$ |
| 1 | $q_1 \le Q < q_2$ | $C_1$ | $C_1 Q$ | $C_0(q_1-q_0)+C_1(Q-q_1)$ |
| 2 | $q_2 \le Q < q_3$ | $C_2$ | $C_2 Q$ | $C_0(q_1-q_0)+C_2(q_2-q_1)+C_2(Q-q_2)$ |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| J | $q_j \le Q < q_{j+1}$ | $C_j$ | $C_j Q$ | $\sum_{i=1}^{j} C_{i-1}(q_i-q_{i-1})+C_j(Q-q_j)$ |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| N | $q_n \le Q$ | $C_n$ | $C_n Q$ | $\sum_{i=1}^{n} C_{i-1}(q_i-q_{i-1})+C_n(Q-q_n)$ |

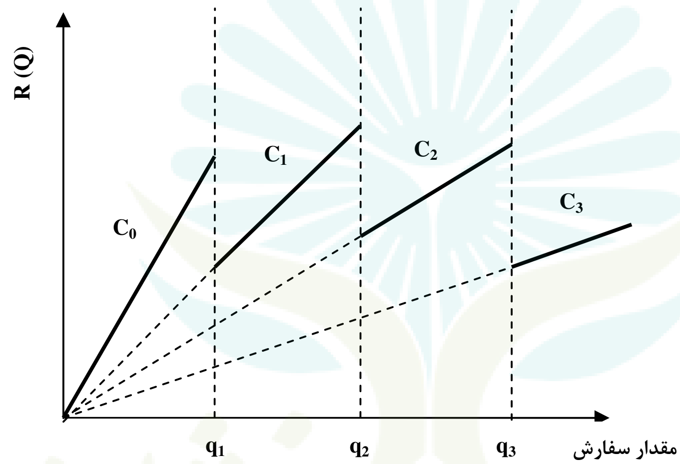
همانطور که ذکر شد در تخفیف با افزایش مقدار سفارش قیمت هر واحد کالا کاهش می‌یابد. یعنی:

$C_0 > C_1 > \ldots > C_n$

کل هزینه خرید را با $R(Q)$ نشان می‌دهند و به $q_j$ها نقاط تخفیف یا نقاط شکست یا نقاط تغییر قیمت می‌گویند.

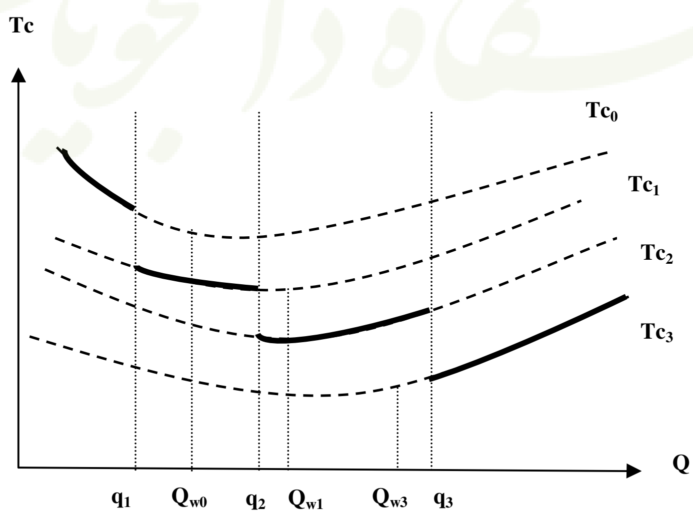
## ۲-۷ مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی در حالت تخفیف کلی[1]

گاهی اوقات فروشندگان اعلام می‌کنند چنانچه مقدار سفارش تا سقف $q_1$ باشد، قیمت خرید هر واحد کالا $C_1$ است. چنانچه مقدار سفارش تا سقف $q_2$ باشد، قیمت خرید هر واحد کالا $C_2$ و ... می‌باشد. یعنی تخفیف داده شده برای کل مقدار سفارش است. بنابراین هزینه خرید از حاصلضرب قیمت هر واحد کالا در مقدار سفارش بدست می‌آید. نمودار هزینه خرید برای تخفیف کلی به صورت شکل ۱-۷ است. این نمودار بصورت گسسته می‌باشد و امتداد تمام خطوط از مبدا مختصات می‌گذرد. شیب خطوط نیز برابر قیمت خرید است.




**شکل ۱-۷ نمودار هزینه خرید در حالت تخفیف کلی**

مانند هزینه خرید، نمودار کل هزینه‌ی سالیانه سیستم برای مدل تخفیف کلی نیز گسسته می‌باشد (شکل ۲-۷ را ببینید).




**شکل ۲-۷ نمودار کل هزینه سالیانه در حالت تخفیف کلی**

[1] . Discount for All Units

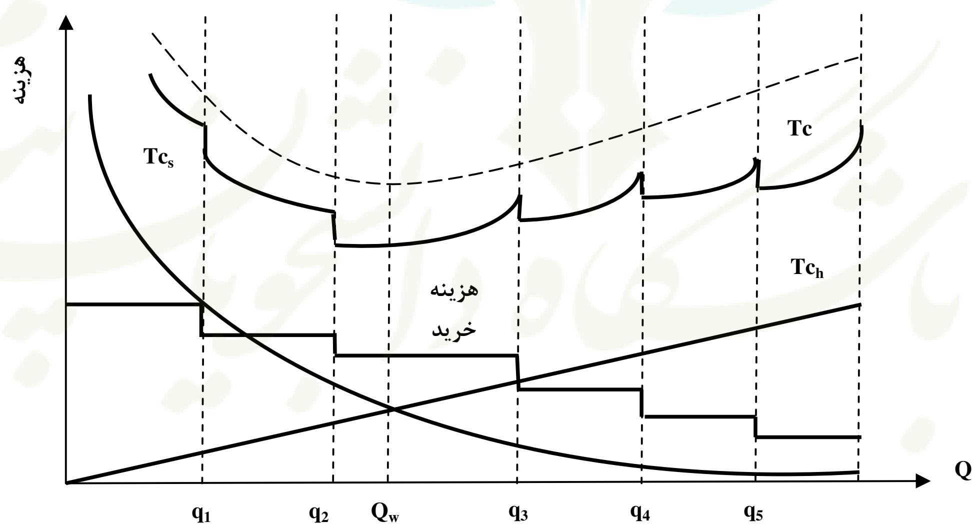
در شکل ۲-۷ قسمتی از $Tc_j(Q)$ $(j=0,1,2,3)$ نشان داده شده است. بخشی که با خط پر کشیده شده است، بخش قابل حصول این تابع و قسمتی که با خطچین رسم شده است، بخش غیرقابل حصول آن، یعنی ناحیه‌ای که در آن $C_j$ صحت ندارد را نشان می‌دهد. بنابراین تمام قسمت‌هایی که با خط پر رسم شده‌اند، منحنی واقعی هزینه سالیانه یعنی $T(Q)$ را بدست می‌دهند. هزینه متوسط سالیانه سیستم برابر است با مجموع هزینه‌های سفارش‌دهی، نگهداری و خرید. بنابراین وقتی هزینه هر واحد $C_j$ باشد، باتوجه به اینکه، هزینه خرید در هر محدوده متفاوت است، تابع کل هزینه‌ی سالیانه نیز برای هر محدوده متفاوت و بصورت دو حالت زیر است:

**حالت ۱- هزینه نگهداری تابعی از متوسط موجودی حجمی کالا در انبار باشد.**

در این حالت به ازای هر تن از کالا که به مدت یک دوره در انبار بماند، مبلغ h واحد پولی هزینـه به سازمان تحمیل خواهد شد. در این شرایط، تغییرات قیمت واحد کالا در هزینـه سـالیانه نگهـداری مـوثر نخواهد بود. در این صورت هزینه سالیانه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Tc_j(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{hQ}{2} + C_j D \qquad (7\text{-}1)$$

جمله $C_jD$ در رابطه ۱-۷ شامل هزینه‌ای است که سازمان بابت تامین کالا در واحد زمان می‌پردازد. در این رابطه مقدار $C_j$ بنابراینکه Q در چه محدوده‌ای قرار گرفته باشد، متفاوت خواهد بود. منحنی هزینه‌ها را می‌توانید در شکل ۳-۷ ببینید.




**شکل ۳-۷ تغییرات هزینه و مقدار اقتصادی سفارش در صورتیکه هزینه نگهداری تابعی از متوسط موجودی حجمی کالا در انبار باشد.**

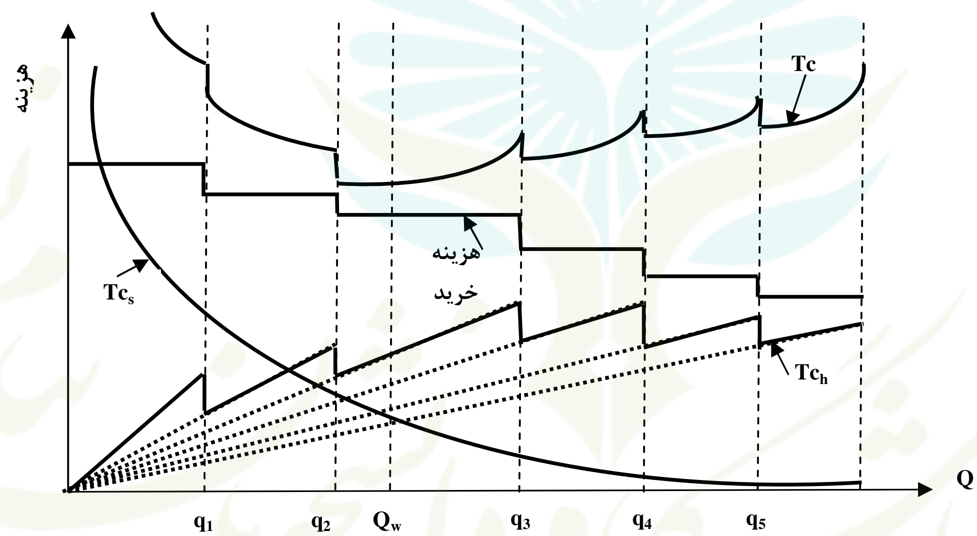
همانگونه که در شکل ۳-۷ نشان داده شده، ارتفاع منحنی هزینه خرید در فواصل بین مقایر q ثابت بوده و در نقاط تغییر قیمت، شکست خواهد داشت. منحنی خط‌چین نشان‌دهنده حالتی است که قیمت واحد کالا، C، ثابت باشد. توجه به این نکته ضروری است که به دلیل شیب منفی منحنی در سمت چپ نقطه ویلسون، نقاط سمت چپ همواره بالاتر از مقدار نقطه $Q_w$ می‌باشند، اما هر یک از نقاط سمت راست می‌توانند دارای

هزینه کمتری باشند. در نقطه ویلسون شیب منحنی از چپ به راست از حالت کاهشی به افزایشی تغییر می‌یابد. بنابراین در این مدل:

*برای دستیابی به نقطه اقتصادی سفارش باید مقدار هزینه سالیانه را در نقطه ویلسون و نقاط سمت راست آن بررسی کرد.*

**حالت ۲- هزینه‌های نگهداری تابعی از متوسط موجودی پولی کالا در انبار باشد.**

در قسمت‌های قبل بیان شد که در بعضی موارد به جای اینکه هزینه‌های نگهداری موجودی را به صورت واحد پول به ازاء واحد کالا در واحد زمان ارائه نمایند، این هزینه‌ها را به صورت واحد پول به ازای هر واحد پول از کالای موجودی در انبار در واحد زمان ارائه می‌کنند. در این شرایط، با توجه به اینکه با تغییر مقادیر هر بار سفارش، قیمت واحد کالا نیز تغییر می‌نماید، هزینه‌های نگهداری نیز در نقاط شکست تغییر خواهند کرد. این موضوع را می‌توانید در شکل ۴-۷ ببینید.




**شکل ۴-۷ تغییرات هزینه و مقدار اقتصادی سفارش در صورتیکه هزینه‌های نگهداری تابعی از متوسط موجودی پولی کالا در انبار باشد.**

همانطور که در نمودار ۴-۷ نشان داده شده، در این حالت، تغییرات قیمت واحد کالا در هزینه سالیانه نگهداری موثر خواهد بود و شیب خط $Tc_h$ برابر با $\frac{h_j}{2}$ می‌باشد. در این صورت هزینه سالیانه را می‌توان به صورت رابطه ۲-۷ نوشت:

$$\mathrm{Tc_j}(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{h_j Q}{2} + C_j D, \quad h_j = iC_j + w \qquad q_i \le q_{j+1} \tag{7-2}$$

در این حالت نیز مانند حالت ۱، در نقطه ویلسون شیب منحنی از چپ به راست از حالت کاهشی به افزایشی تغییر می‌یابد. بنابراین در این حالت نیز:

*برای دستیابی به نقطه اقتصادی سفارش باید مقدار هزینه سالیانه را در نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست آن بررسی کرد.*

چنانچه حداقل تابع $Tc_j(Q)$ را در ناحیه $0 < Q < \infty$ با $Q^w_j$ نشان دهیم، آنگاه، بهترین نقطه تابع محدوده زام با مشتق‌گیری از Tc بدست می‌آید و بصورت زیر است:

$$Q_j^w = \sqrt{\frac{2AD}{iC_j}} \tag{7-3}$$

$$Tc_j(Q_j^w) = Min\, Tc_j(Q) \ , \quad 0 < Q < \infty \tag{7-4}$$

از آنجا که $C_j > C_{j+1}$ است، واضح است که:

$$Q_0^w < Q_1^w < \cdots < Q_j^w$$

به علاوه به ازاء تمام مقادیر Q داریم:

$$Tc_0(Q) > Tc_1(Q) > Tc_2(Q) > \ldots > Tc_j(Q)$$

برای پیدا کردن مقدار بهینه سفارش بایستی نقطه حداقل منحنی خط پر را بدست آورد. این امر را می‌توان بصورت زیر انجام داد:

فرض کنید $Q^*_j$ مقداری از Q باشد که نقطه حداقل تابع $Tc_j(Q)$ را در ناحیه قابل حصول آن، یعنی محدوده $q_j \le Q < q_{j+1}$ بدست می‌دهد. به عبارت دیگر، $Tc_j(Q_j^w) = Min\, Tc_j(Q)$

حال سه حالت بوجود می‌آید (شکل ۵-۷):

۱. اگر $Q_j^w$ از نقطه تخفیف انتهایی محدوده ($q_{j+1}$) بیشتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده زام ($Q_j^*$) برابر $q_{j+1}$ می‌باشد (شکل ۵-۷، حالت الف).

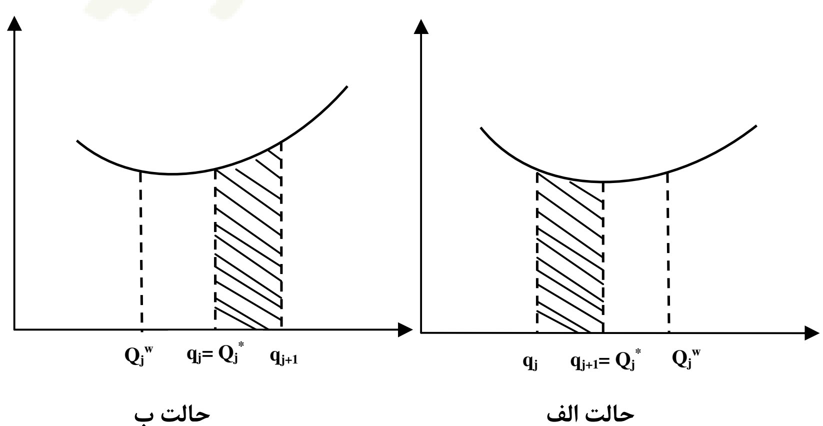
$$q_{j+1} \le Q_j^w \ \rightarrow \ Q_j^* = q_{j+1} \tag{7-5}$$

۲. اگر $Q_j^w$ بین نقاط تخفیف ابتدایی و انتهایی محدوده خود باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده برابر $Q_j^w$ می‌باشد.

$$q_j \le Q_j^w < q_{j+1} \ \rightarrow \ Q_j^* = Q_j^w \tag{7-6}$$

۳. اگر $Q_j^w$ از نقطه تخفیف ابتدایی محدوده ($q_j$) کمتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده زام ($Q_j^*$) برابر $q_j$ می‌باشد (شکل ۵-۷، حالت ب).

$$Q_j^w < q_j \ \rightarrow \ Q_j^* = q_j \tag{7-7}$$




**شکل ۵-۷ انتخاب نقطه بهینه در حالا تخفیف کلی**

بنابراین الگوریتم حل به صورت زیر خواهد بود:

### ۷-۲-۱ الگوریتم حل مدل تخفیف کلی

با توجه به نمودار هزینه متغیر سالیانه بر حسب Q که در شکل ۳-۷ و ۴-۷ رسم گردید، دیده می‌شود که بطور کلی با حرکت از سمت راست به چپ (حرکت از $q_j$ به سمت $q_1$) متوسط هزینه متغیر سالیانه افزایش می‌یابد. بنابراین برای حل مدل تخفیف کلی می‌توان از الگوریتم زیر استفاده کرد:

گام اول- ابتدا مقادیر $Q_j^w$ را به ازاء j=n و j=n-1 و j=n-2 و ... (از آخرین محدوده به سمت اولین محدوده) محاسبه کرده و از روی آن مقدار $Q_j^*$ را محاسبه می‌کنیم. محاسبه را تا زمانی که برای اولین بار در محدوده‌ای (مثلاً محدوده jام) $Q_j^*= Q_j^w$، یعنی $Q_j^w$ داخل محدوده قابل قبول باشد، ادامه می‌دهیم.

گام دوم- مقادیر هزینه کل را به ازاء $Q_j^*$ های بدست آمده از گام اول محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. آن سفارشی که کمترین هزینه را دارد سفارش بهینه است.

$$\mathrm{Tc_j}(Q_j^w) = Min\, Tc_j(Q_j^*)$$

**مثال ۱-** برای خرید کالایی، پیشنهاد قیمت و شرایط به شرح زیر از فروشنده کالا دریافت شده است:

| مقدار سفارش (Q) | هزینه واحد ($C_j$) |
|---|---|
| $0 < Q < 50$ | $C_0= 8.3$ |
| $50 \le Q < 120$ | $C_1= 8.2$ |
| $120 \le Q < 140$ | $C_2= 8$ |
| $Q \ge 140$ | $C_3= 7.9$ |

چنانچه نرخ مصرف این کالا در سال ۴۰۰ واحد، هزینه هر بار سفارش‌دهی ۲۰۰ واحد پولی و هزینه‌های نگهداری ۱۶ واحد پول به ازاء هر واحد کالا در سال باشد، مقدار اقتصادی هر بار سفارش این کالا را بدست آورید؟

**پاسخ:**

نقطه حداقل تابع $\mathrm{Tc_j}(Q)$ (در ناحیه $0 < Q < \infty$) عبارت است از:

$$Q_j^w = \sqrt{\frac{2(200)\times 400}{16}} = 100$$

در این مثال چون هزینه‌های نگهداری به ازای هر واحد کالا در سال بیان شده (حالت ۱)، بنابراین لازم خواهد بود که مقدار هزینه سالیانه را به ازای مقادیر ویلسون و نقاط سمت راست آن یعنی ۱۰۰، ۱۲۰ و ۱۴۰ محاسبه کنیم:

$$\mathrm{Tc_j}(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{hQ}{2} + C_jD$$

با توجه به جدول قیمت‌ها و هزینه متغیر سالیانه این مقادیر هزینه‌ها عبارت‌اند از:

$C_3= 7.9,\quad Tc_3(140) = \frac{200\times400}{140} + \frac{16\times140}{2} + 7.9\times400 = 4851.43$ واحد پول در سال

$C_2= 8,\qquad Tc_2(120) = \frac{200\times400}{120} + \frac{16\times120}{2} + 8\times400 = 4826.67$ واحد پول در سال

$C_1= 8.2,\qquad Tc_1(100) = \frac{200\times400}{100} + \frac{16\times100}{2} + 8.2\times400 = 4880$ واحد پول در سال

بنابراین مقدار اقتصادی سفارش برابر ۱۲۰ واحد کالا با هزینه سالیانه $Tc_2= 4826.67$ خواهد بود. بنابر آنچه گفته شد، واضح است که در صورتیکه مقدار هزینه متغیر سالیانه را برای نقاط سمت چپ ویلسون محاسبه کنیم، هزینه از ۴۸۸۰ واحد پول در سال بیشتر خواهد بود.

**مثال ۲**ـ مصرف سالیانه محصولی ۲۵۰۰ واحد، نرخ هزینه نگهداری این محصول ۱۰ درصد در سال، و هزینه هربار سفارش آن ۱۰۰ تومان است. این محصول را می‌توان از فروشنده‌ای که جدول قیمت زیر را برای مقادیر مختلف خرید پیشنهاد نموده است، خریداری نمود. مقدار اقتصادی خرید در هر بار چقدر است؟

| مقدار سفارش (Q) | هزینه واحد ($C_j$) |
|---|---|
| $0 < Q < 500$ | $C_0= 5$ |
| $500 \le Q < 2500$ | $C_1= 4.75$ |
| $2500 \le Q < 5000$ | $C_2= 4.6$ |
| $Q \ge 5000$ | $C_3= 4.5$ |

**پاسخ:**

در این مثال تعداد نقاط تخفیف $n=3$ است $(q_1= 500, q_2= 2500, q_3= 5000)$. بنابراین چهار منحنی $Tc_j$ وجود دارد. برای $q_j \le Q < q_{j+1}$، هزینه واحد $C_j$ و هزینه متوسط سالیانه عبارت است از:

$$Tc(Q) = \frac{2500\times100}{Q} + 0.1C_j\frac{Q}{2} + 2500C_j,\quad j = 0,1,2,3$$

نقطه حداقل تابع $Tc_j(Q)$ (در ناحیه $0 < Q < \infty$) عبارت است از:

$$Q_j^w = \sqrt{\frac{2(2500)\times100}{0.1C_j}} = 500\sqrt{\frac{20}{C_j}}$$

برای $j=3$

$$Q_3^w = 1055 < q_3 = 5000$$

بنابراین نقطه حداقل هزینه در قسمت قابل حصول تابع $Tc_3(Q)$ در نقطه $Q_3^w= 5000$ است.

برای $j=2$:

$$Q_2^w = 1040 < q_2 = 2500 \Rightarrow Q_2^w = 2500$$

برای $j=1$:

$$Q_1^w = 1025$$

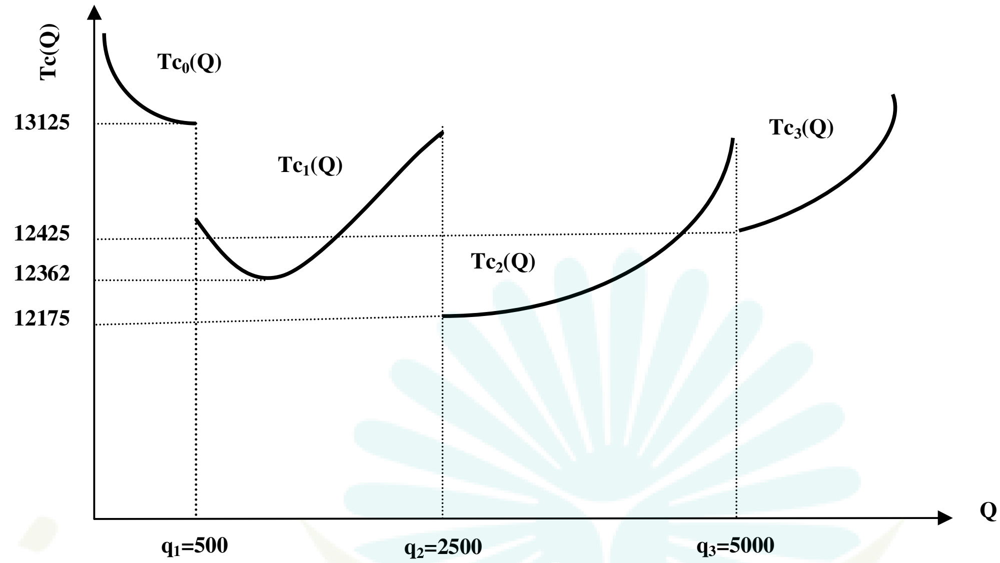
این مقدار در محدوده قابل حصول تابع $Tc_1(Q)$ و لذا $Q_1^*= Q_1^w = 1025$ است. بنابراین دیگر نیاز به محاسبه $Q_0^w$ نیازی نیست. مقدار سفارش اقتصادی $Q^*$ از مقایسه هزینه‌های $Tc_1(Q_1^*)$، $Tc_2(Q_2^*)$ و $Tc_3(Q_3^*)$ بدست می‌آید. با توجه به جدول قیمت‌ها و هزینه متغیر سالیانه این مقادیر هزینه‌ها عبارت‌اند از:

$C_3= 4.5$ و $Tc_3(5000)= 12425$

$C_2= 4.6$ و $Tc_2(2500)= 12175$

$C_1= 4.75$ و $Tc_1(1025)= 12362$

ملاحظه می‌شود که مقدار بهینه برابر با $Q_2^w = 2500$ است. منحنی هزینه سالیانه $Tc_j(Q)$ در شکل رسم شده است.




**مثال ۳-** مصرف کالایی برابر ۶۰۰ واحد در سال می‌باشد، دو نقطه شکست قیمت در $q_1=500$ و $q_2= 1000$ واحد وجود دارد و $C_0= 0.3$، $C_1= 0.29$ و $C_2= 0.28$ واحد پولی هستند. اگر هزینه ثابت سفارش‌دهی ۸ واحد پولی و نرخ هزینه نگهداری ۲۰ درصد در سال باشد، مقدار سفارش اقتصادی بهینه را محاسبه نمایید.

**پاسخ:**

| قیمت ساخت یا خرید | مقدار سفارش |
|---|---|
| 0.3 | 0- 499 |
| 0.29 | 500- 999 |
| 0.28 | بیشتر از 1000 |

چون قیمت روند کاهش دارد، برای تعیین Q بهینه از آخرین بازه ، $Q_j^w$ را محاسبه می‌نمائیم:

$$C_2= 0.28, \qquad Q_2^w= \sqrt{\frac{2\times600\times8}{0.2\times0.28}} = 414 \text{ واحد} < 1000 \qquad \rightarrow Q_2^*= 1000,$$

$$K(0.28) = 600 \times 0.28 + \frac{600\times8}{1000} + 0.2 \times 0.28 + \frac{1000}{2} = 200.8$$

$$C_1= 0.29, \qquad Q_1^w= \sqrt{\frac{2\times600\times8}{0.2\times0.29}} = 406 \text{ واحد} < 500 \qquad \rightarrow Q_1^*= 500,$$

$$K(0.28) = 600 \times 0.29 + \frac{600 \times 8}{500} + 0.2 \times 0.29 + \frac{500}{2} = 198.1$$

$$C_0= 0.3, \qquad Q_0^w= \sqrt{\frac{2\times600\times8}{0.2\times0.3}} = 400 \text{ واحد } 0< 400 < 499 \qquad \rightarrow Q_0^*= Q_0^w= 400,$$

$$K(0.3) = \sqrt{2 \times 600 \times 8 \times 0.2 \times 0.3} + 0.3 \times 600 = 204$$

توجه کنید که حتی اگر باز هم بازه قیمت وجود داشت، دیگر ادامه نمی‌دهیم، چون $Q_0^* = Q_0^w$، با مقایسه کل هزینه‌ها، درمی‌یابیم که $Q_1^* = 500$ بهینه است و مقدار Q بهینه در یک نقطه شکست رخ داده است.

## ۷-۲-۲ نکات مدل تخفیف کلی

۱. اگر با کاهش قیمت روبرو باشیم، مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی، نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون است، یعنی:

$Q^* = \{Q_3^w, q_3, q_4, \dots\}$

۲. روابط زیر برای $Q_j^w$ و $K(Q_j^w)$ های تمام محدوده‌ها برقرار است:

$$Q_0^w \le Q_1^w \le Q_2^w \le \cdots \le Q_n^w, \quad K_0(Q_0^w) > K_1(Q_1^w) > K_2(Q_2^w) > \cdots > K_n(Q_n^w)$$

۳. اگر اگر کل هزینه نگهداری سالیانه را با TCH و کل هزینه سفارش‌دهی سالیانه را TCS بنامیم، باتوجه به اینکه در حل مدل تخفیف کلی، حرکت از سمت راست، از $q_n$ به سمت $q_1$، می‌باشد، در نقطه بهینه این دو هزینه با یکدیگر برابر و در سمت راست نقطه بهینه همواره هزینه نگهداری سالیانه بیشتر از هزینه سفارش‌دهی سالیانه است، در سمت چپ نقطه بهینه نیز برعکس سمت راست می‌باشد. بنابراین می‌توان گفت در نقطه بهینه مدل تخفیف کلی رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی بصورت زیر است:

$TCH \ge TCS$

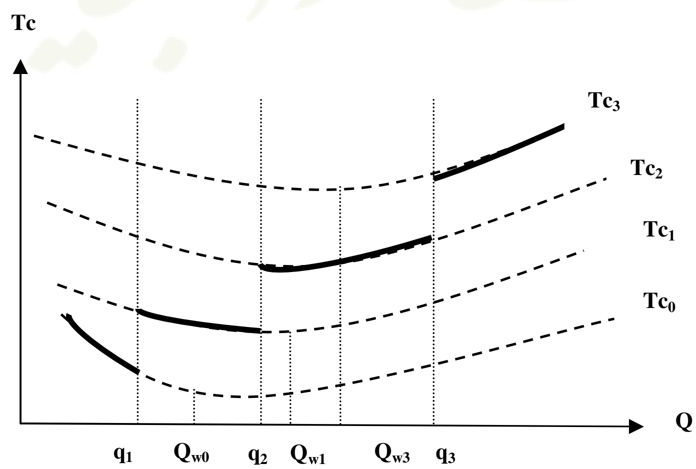
۴. در یک مدل خلاف تخفیف کلی اگر به ازای افزایش مقدار سفارش، قیمت واحد کالا نیز افزایش یابد، یعنی $C_0 < C_1 < C_2 < \dots < C_n$ روش حل مشابه تخفیف کلی است، با این تفاوت که از محدوده اول شروع می‌کنیم و $Q_j^*$ را تا آنجا که $Q_j^* = Q_j^w$ شود ادامه می‌دهیم. در این حالت ترتیب نمودارها برعکس می‌گردد. یعنی نمودار هزینه کل بصورت شکل ۶-۷ خواهد بود.

۵. اگر با افزایش قیمت روبرو باشیم، مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی، نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون است، یعنی:

$Q^* = \{Q_3^w, q_2, q_1\}$

همچنین رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه بصورت زیر است:

$TCH \le TCS$




**شکل ۶-۷ نمودار هزینه کل در حالتی که به ازای افزایش مقدار سفارش، قیمت واحد کالا نیز افزایش یابد**

۶. درصورتیکه تخفیف کلی برای سایر پارامترهای مدل مانند A، h و ... باشد، دقیقاً مانند روش حل مدل تخفیف کلی عمل می‌کنیم با این تفاوت که $Q_j^w$ و $Tc_j$ را براساس پارامتر تغییر یافته محاسبه می‌کنیم.

**مثال ۴-** برای خرید یک کالا، فروشنده در مقابل مقادیر هربار سفارش (q)، قیمت هر واحد را به شرح زیر اعلام نموده است:

| مقدار سفارش | قیمت واحد |
|---|---|
| $0 < q < 100$ | 510 |
| $100 \le q < 300$ | 400 |
| $q \ge 300$ | 390 |

با توجه به نرخ تقاضای کالا و هزینه سفارش آن، نقطه ویلسون معتبر منحنی هزینه کل موجودی‌ها برابر با ۲۵۰ واحد کالا محاسبه شده است. مقدار بهینه (اقتصادی EOQ) برای سفارش این کالا مطابق با کدام گزینه می‌باشد.؟

۱) ۲۵۰ یا ۳۰۰ ۲) دقیقاً ۲۵۰ ۳) ۲۵۰ یا ۲۰۰ یا ۱۰۰ ۴) هر مقداری از ۲۵۰ به پایین

**پاسخ:** از آنجا که $Q_w = 250$ در محدوده دوم قرار دارد، براساس الگوریتم حل ذکر شده، مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی ۲۵۰ و ۳۰۰ است و از آنجا که اطلاعات کافی برای محاسبه هزینه این دو نقطه در دست نیست تنها می‌توان گفت که نقطه بهینه ۲۵۰ یا ۳۰۰ می‌باشد.

**مثال ۵-** یک کالای وارداتی را که توسط کانتینرهای مخصوص و مستقل حمل می‌شود در نظر بگیرید. مقدار سفارش کالا در حدی است که همواره یک کانتینر برای حمل کافی خواهد بود. چنانچه کرایه کانتینر برای هر بار حمل ۱۰۰۰۰۰۰واحد پولی، قیمت خرید هر کیلو کالا ۲۰۰۰۰۰ واحد پولی، مصرف سالیانه ۱۶۰۰ کیلو، هزینه‌های اداری، تدارکاتی، مخابرات و غیره برای هر بار سفارش کالا ۶۰۰۰۰۰ واحد پولی و هزینه نگهداری کالا در انبار، به ازاء هر کیلو ۸۰۰۰ در سال باشد، با توجه به اطلاعات جدول زیر، مقدار اقتصادی هر بار سفارش و فواصل زمانی بهینه بین دو سفارش را محاسبه نمایید. (یک سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید).

| مقدار سفارش | هزینه‌های حمل |
|---|---|
| $0 < q < 500$ | 20000 |
| $500 \le q < 1000$ | 19000 |
| $q \ge 1000$ | 18000 |

**پاسخ:**

در این مثال هزینه‌های حمل در دو بخش بیان شده‌اند: یک بخش از هزینه که در هر بار سفارش ثابت بوده و به مقدار سفارش بستگی ندارد، این هزینه مربوط به کرایه کانتینر برای هر بار سفارش است و بنابراین

جزء هزینه‌های سفارش‌دهی است. بخش دوم، هزینه حمل به ازاء هر کیلو کالا است و با توجه به مقدار سفارش متغیر خواهد بود که در قیمت واحد کالا درنظر گرفته می‌شود. بنابراین:

| مقدار سفارش | قیمت واحد کالا |
|---|---|
| $0 < q < 500$ | 220000 |
| $500 \le q < 1000$ | 219000 |
| $q \ge 1000$ | 218000 |

$$\text{هزینه‌های هر بار سفارش‌دهی}(A) = 1000000 + 600000 = 1600000$$
$$h = 8000\,, \quad D = 1600$$

با توجه به اینکه هزینه نگهداری تابعی از متوسط موجودی حجمی کالا در انبار است (حالت ۱)، برای حل این مثال می‌توان نقطه ویلسون را محاسبه و مقدار کل هزینه سالیانه را به ازاء $Q_w$ و نقاط تغییر قیمت سمت راست ویلسون بررسی نمود (با توجه به روند کاهشی قیمت واحد کالا در محدوده اول به سمت محدوده آخر):

$$Q_w = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 1600000 \times 1600}{8000}} = 800 \text{ کیلو}$$

$Q_w$ در بازه دوم قرار دارد، بنابراین هزینه را به ازای ۸۰۰ و ۱۰۰۰ بدست می‌آوریم:

$$Tc_{800} = \sqrt{2ADh} + C_j D = \sqrt{2 \times 1600000 \times 1600 \times 8000} + 219000 \times 1600 = 356800000$$

$$Tc_{1000} = \frac{AD}{Q} + \frac{hQ}{2} + C_j D = 1600000 \times \frac{1600}{1000} + 8000 \times \frac{1000}{2} + 218000 \times 1600 = 355360000$$

با توجه به مقدار کل هزینه سالیانه، مقدار اقتصادی سفارش ۱۰۰۰ کیلو و فاصله زمانی بهینه بین دو سفارش برابر است با:

$$T^* = \frac{Q}{D} = \frac{1000}{1600} = 0.625 \text{ سال} = 0.625 \times 365 \cong 228 \text{ روز}$$

**مثال ۶-** یک شرکت مواد اولیه مورد نیاز خود را از خارج تهیه می‌نماید. فروشنده قیمت یک نوع ماده را به شرح زیر اعلام نموده است:

| مقدار هر بار سفارش (کیلو) | قیمت واحد (کیلو/واحد پولی) |
|---|---|
| $0 < q < 100$ | 10 |
| $100 \le q < 200$ | 9 |
| $q \ge 200$ | 8 |

کالا باید در ظرف‌های مخصوصی که ۱۰۰۰ کیلو ظرفیت دارند حمل شوند. کرایه ظرف‌ها به ازاء هر بار حمل کالا ۳۹ واحد پولی است. چنانچه هزینه‌های اداری و تدارکاتی به ازاء هر بار سفارش ۳۰ واحد پولی، واحد هزینه نگهداری این ماده در انبار، ۴۰ درصد متوسط موجودی و مصرف سالیانه کالا ۱۲۹۶ کیلو باشد، با توجه به هزینه حمل که شرکت حمل و نقل به شرح زیر اعلام نموده است، مطلوبست:

الف- محاسبه مقدار اقتصادی هر بار سفارش.

ب- جمع هزینه‌های سالیانه موجودی‌ها.

لازم به ذکر است که، سایر هزینه‌های کالا (گمرک، بیمه، ...) ثابت بوده و تا رسیدن کالا به داخل انبار، ۳ واحد پولی به ازاء هر کیلو است.

| وزن خالص مواد در ظرف (کیلو) | هزینه حمل (کیلو/واحد پولی) |
|---|---|
| $0 < q < 150$ | 2 |
| $150 \le q < 250$ | 1.8 |
| $q \ge 250$ | 1.5 |

**پاسخ:**

برای حل لازم است ابتدا قیمت واحد کالا را در بازه‌های مختلف بدست آورد:

| مقدار سفارش (کیلو) | قیمت خرید | هزینه حمل | سایر هزینه‌ها | جمع |
|---|---|---|---|---|
| $0 < q < 100$ | 10 | 2 | 3 | 15 |
| $100 \le q < 150$ | 9 | 2 | 3 | 14 |
| $150 \le q < 200$ | 9 | 1.8 | 3 | 13.8 |
| $200 \le q < 250$ | 8 | 1.8 | 3 | 12.8 |
| $q \ge 250$ | 8 | 1.5 | 3 | 12.5 |

هزینه‌های سفارش‌دهی نیز از جمع هزینه‌های اداری و تدارکاتی و هزینه ثابتی که به ازای هر بار حمل کالا پرداخت می‌شود، محاسبه می‌گردد. بنابراین:

$$A = 30 + 39 = 69\,, \quad D = 1296\,, \quad i = 0.4$$

**الف-**

ابتدا مقادیر $Q_j^w$ را به ازاء j=4 و j=3 و j=2 و ... با توجه به روند کاهشی قیمت از آخرین محدوده به سمت اولین محدوده، محاسبه کرده و از روی آن مقدار $Q_j^*$ را محاسبه می‌کنیم. محاسبه را تا زمانی که برای اولین بار در محدوده‌ای (مثلاً محدوده jام) $Q_j^w$ داخل محدوده قابل قبول باشد، یعنی $Q_j^* = Q_j^w$، ادامه می‌دهیم. سپس مقادیر هزینه کل را به ازاء $Q_j^*$ های بدست آمده محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. آن سفارشی که کمترین هزینه را دارد سفارش بهینه است.

نقطه حداقل تابع $Tc_j(Q)$ (در ناحیه $0 < Q < \infty$) عبارت است از:

$$Q_j^w = \sqrt{\frac{2AD}{iC_j}} = \sqrt{\frac{2(69)\times 1296}{0.4C_j}} = \sqrt{\frac{447120}{C_j}}$$

برای j=4

$$Q_4^w = 189.12 < q_4 = 250$$

بنابراین نقطه حداقل هزینه در قسمت قابل حصول تابع $Tc_4(Q)$ در نقطه $Q_4^w = 250$ است.

برای j=3:

$$Q_3^w = 186.9 < q_3 = 200 \quad \Rightarrow Q_3^w = 200$$

برای j=2:

$$Q_2^w = 180 \text{ در بازه‌ی خود قرار دارد}$$

بنابراین دیگر ادامه نمی‌دهیم، چون $Q_2^w$ در بازه خود قرار گرفته است. حال هزینه‌ها را در نقـاط ۱۸۰، ۲۰۰ و ۲۵۰ بررسی می‌کنیم.

**ب-**

هزینه متوسط سالیانه عبارت است از:

$$Tc(Q) = \frac{69 \times 1296}{Q} + 0.4C_j\frac{Q}{2} + 1296C_j, \quad j = 2,3,4$$

$C_4 = 12.5$ و $Tc_4\,(250) = 17182.69$

$C_3 = 12.8$ و $Tc_3\,(200) = 17547.92$

$C_2 = 13.8$ و $Tc_2\,(180) = 18878.4$

ملاحظه می‌شود که مقدار بهینه برابر با $Q_4^w = 250$ است.

**مثال ۷-** عملیات سفارش یک کالابه موسسه‌ای واگذار گردیده است. براساس قرارداد منعقده، موسسه بابت هر سفارش مبلغی مطابق جدول زیر از سفارش‌دهنده دریافت می‌کند. چنانچه مصرف سالیانه کالا ۲۴۰۰۰ واحد و هزینه نگهداری ۳۷/۵ واحد پولی به ازاء هر واحد کالا در سال باشد، مقدار سفارش اقتصادی این کالا را بدست آورید.

| مقدار سفارشات در سال (N) | هزینه هر سفارش |
|---|---|
| $0 < N < 10$ | 800 |
| $0 \leq N < 20$ | 600 |
| $0 \leq N < 60$ | 500 |
| $N \geq 60$ | 200 |

**پاسخ:**

ابتدا با توجه به نرخ تقاضا و مقدار سفارش Q را در نقاط مورد‌نظر بدست می‌آوریم:

| مقدار سفارشات در سال (N) | | هزینه هر سفارش |
|---|---|---|
| $N \geq 60$ | $0 < Q \leq 400$ | 200 |
| $0 \leq N < 60$ | $400 < Q \leq 1200$ | 500 |
| $0 \leq N < 20$ | $1200 < Q \leq 2400$ | 600 |
| $0 < N < 10$ | $2400 < Q < \infty$ | 800 |

با توجه به روند افزایشی هزینه سفارش از محدوده اول شروع می‌کنیم و $Q_j^*$ را تا آنجا که $Q_j^* = Q_j^w$ شود ادامه می‌دهیم. در این حالت، مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی، نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون خواهد بود:

$$Q_{w_{0-400}} = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times 24000}{37.5}} = 505.9 \text{ در بازه‌ی خود قرار ندارد } \rightarrow Q_0^w = 400$$

$$Q_{w_{400-1200}} = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 500 \times 24000}{37.5}} = 800 \text{ در بازه‌ی خود قرار دارد}$$

چون Q در بازه‌ی خود قرار گرفت دیگر ادامه نمی‌دهیم و هزینه را در نقاط ۴۰۰ و ۸۰۰ با یکدیگر مقایسه می‌کنیم:

$$Tc(Q) = \frac{A_j \times 24000}{Q} + 37.5\frac{Q}{2}, \quad j = 0,1$$

$A_1 = 500$ و $Tc_1\,(800) = 30000$

$A_0 = 200$ و $Tc_0\,(400) = 19500$

ملاحظه می‌شود که مقدار بهینه برابر با $Q_0^w = 400$ است.

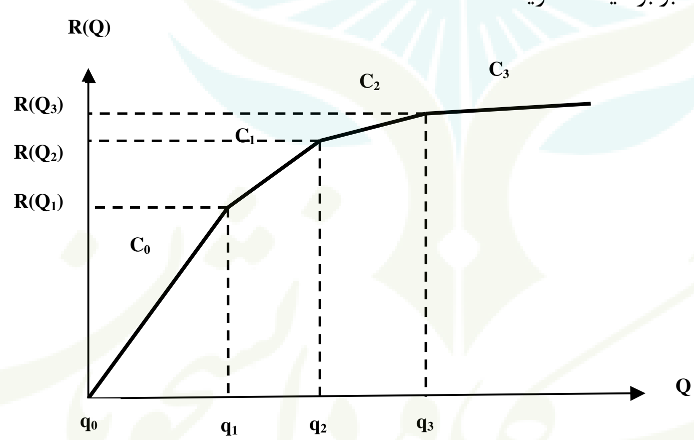
## ۳-۷ مدل تخفیف نموی[1] (افزایشی یا تدریجی)

گاهی اوقات، فروشندگان اعلام می‌کنند، چنانچه مقدار سفارش تا سقف $q_1$ باشد، قیمت خرید برای هر واحد کالا $C_1$ است، چنانچه مقدار سفارش تا سقف $q_2$ $(q_2 > q_1)$ باشد، $q_1$ مقدار اول به قیمت $C_1$ و مابقی به قیمت $C_2$ $(C_2 < C_1)$ و ... عرضه می‌شوند. این مدل به نام مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی در حالت تخفیف نموی (افزایشی) شناخته می‌شود. یعنی تخفیف داده شده فقط شامل آن واحدهایی می‌شود که در فاصله $(q_j, q_{j+1})$ قرار دارند. در این حالت:

$$q_0 < q_1 < q_2 < \dots \quad , C_1 > C_2 > \dots$$

$$\text{متوسط قیمت هر واحد کالا}: \bar{C} = \frac{R(Q)}{Q} \qquad (7\text{-}8)$$

رسم منحنی هزینه خرید تخفیف نموی بصورت پیوسته است. این نمودار در شکل ۷-۷ نشان داده شده است. شیب خطوط برابر قیمت خرید است.




**شکل ۷-۷ منحنی هزینه خرید R(Q) برحسب مقدار سفارش Q**

در این نمودار در نقاط شکست یا تخفیف، پله بوجود نمی‌آید.

مانند تخفیف کلی فرض کنید وقتی که $q_j < Q \le q_{j+1}$ است، هزینه متوسط سالیانه برابر $Tc_j(Q)$ باشد. دراینصورت $Tc_j(Q)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$Tc_j(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{h_j Q}{2} + \bar{C}D\,, \quad h_j = i\bar{C} \qquad (7\text{-}9)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگزینی } \bar{C} \text{ در رابطه } 9-7 \text{ خواهیم داشت}} Tc_j(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{iR(Q)}{2} + \frac{DR(Q)}{Q} \qquad (7\text{-}10)$$

همانگونه که در ابتدای فصل و جدول ۱-۷ بیان شد، هزینه خرید R(Q) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

[1] . Incremental Discount

$$R(Q)=\begin{cases} C_0Q & \text{برای } j=0 \\ \sum_{i=1}^{j} C_{i-1}(q_i-q_{i-1})+C_j(Q-q_j) & \text{برای } j\geq 1 \end{cases} \qquad (7\text{-}11)$$

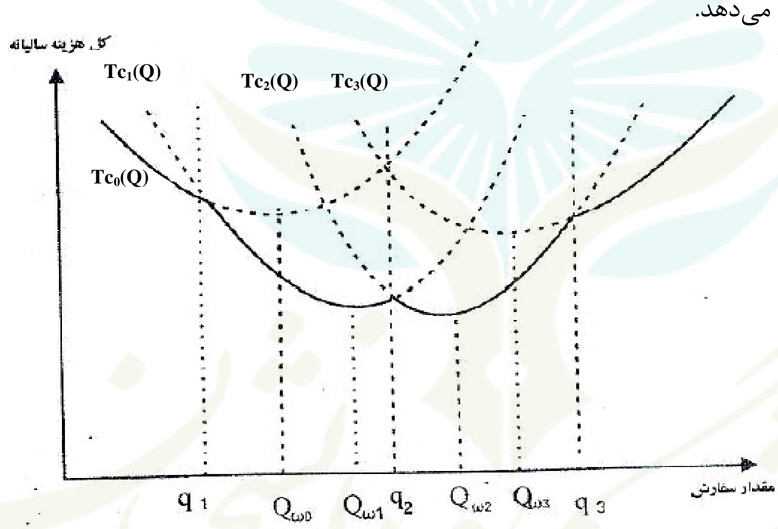
با جایگزینی رابطه ۱۱-۷ در رابطه ۱۰-۷ خواهیم داشت:

$$Tc_j(Q)=\frac{D}{Q}\left[A+R(q_j)-C_jq_j\right]+\frac{iC_jQ}{2}+i\frac{R(q_j)}{2}-iC_j\frac{q_j}{2}+C_jD \qquad (7\text{-}12)$$

برای بدست آوردن $Q_j$ از کل هزینه‌های سالیانه نسبت به Q مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial Tc_j(Q)}{\partial Q}=0 \;\rightarrow\; Q_j=\sqrt{\frac{2D[A+R(q_j)-C_jq_j]}{iC_j}} \qquad (7\text{-}13)$$

در شکل ۸-۷ نمودار هزینه کل سالیانه مدل تخفیف نموی برای حالتی که تعداد نقاط تخفیف n=3 است رسم شده است. در این شکل نیز خط پر قسمت قابل حصول تابع و خط‌چین قسمت غیرقابل حصول تابع هزینه را نشان می‌دهد.




**شکل ۸-۷ نمودار هزینه متغیر سالیانه برحسب Q برای تخفیف نموی**

محاسبه مقدار بهینه Q برای حالت تخفیف نموی تا اندازه‌ای با روش محاسبه در حالت تخفیف کلی گفته شده فرق دارد. نکته مهمی که در حالت تخفیف نموی باید درنظر داشت، این است که، نقطه حداقل تابع Tc(Q) نمی‌تواند در نقاط تخفیف باشد. برای روشن شدن این مطلب باید توجه داشت که منحنی کلی هزینه سالیانه پیوسته است یعنی، $Tc_{j-1}(q_j)=Tc_j(q_j)$. به علاوه، شیب منحنی $Tc_j(Q)$ در نقطه $q_j$ کمتر از شیب منحنی $Tc_{j-1}(Q)$ در همان نقطه $q_j$ است. بنابراین متوسط هزینه سالیانه، Tc(Q) نمی‌تواند در نقطه $q_j$ دارای یک کمینه نسبی باشد، و درنتیجه نقطه کمینه مطلق تابع Tc(Q) نیز نمی‌تواند بر نقاط تخفیف $q_j$ منطبق باشد. باتوجه به این نکته روش محاسبه نقطه بهینه بصورت زیر است:

### ۱-۳-۷ الگوریتم حل مدل تخفیف افزایشی

گام اول- هزینه خرید کل R(Q) و متوسط قیمت هر واحد کالا، R(Q)/Q، را محاسبه و برای هر سطح تخفیف، مقدار سفارش بهینه را تعیین نمائید.

گام دوم- اگر $q_{j-1} \le Q \le q_j$ بود، درآنصورت $Tc_j(Q)$ را محاسبه نمائید. (اگر Q در بازه‌ی مربوط به خود قرار داشت، $Tc_j(Q)$ محاسبه می‌شود، ولی اگر در بازه مربوط به خـود نبـود از آن صـرف‌نظـر کـرده و $Tc_j(Q)$ را محاسبه نکنید).

گام سوم- با مقایسه $Tc_j(Q)$ ها کمترین را انتخاب نمائید. Q مربوط به این $Tc_j(Q)$، Q بهینه است.

**مثال ۸-** در مثال ۲ چنانچه هزینه واحد از نوع تخفیف نموی باشد، یعنی هزینه هر واحد مواد بصورت زیـر باشد، مقدار بهینه سفارش را بدست آورید؟

| مقدار سفارش (Q) | هزینه واحد ($C_j$) |
|---|---|
| $0 < Q < 500$ | $C_0 = 5$ |
| $500 \le Q < 2500$ | $C_1 = 4.75$ |
| $2500 \le Q < 5000$ | $C_2 = 4.6$ |
| $Q \ge 5000$ | $C_3 = 4.5$ |

**پاسخ:**

$$D = 2500\,, \quad i = 0.1\,, \quad A = 100$$

ابتدا هزینه خرید کل R(Q) و متوسط هزینه خرید $(\bar{C})$ را محاسبه و سپس برای هر سطح تخفیـف، مقـدار سفارش بهینه را بدست می‌آوریم:

| محدوده تخفیف | قیمت واحد کالا | کل هزینه خرید (تخفیف نموی) R(Q) | ( |
|---|---|---|---|
| $0 \le Q < 500$ | 5 | 5Q | 5 |
| $500 \le Q < 2500$ | 4.75 | 5(500-0)+ 4.75(Q-500) | 125/Q +4.75 |
| $2500 \le Q < 5000$ | 4.6 | 5(500-0)+ 4.75(2500-500)+ 4.6(Q-2500) | 500/Q +4.6 |
| $Q \ge 5000$ | 4.5 | 5(500-0)+ 4.75(2500-500)+ 4.6(5000-2500)+4.5(Q-5000) | 1000/Q +4.5 |

$$Q_j = \sqrt{\frac{2D[A + R(q_j) - C_j q_j]}{iC_j}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Q_{0-500} = \sqrt{\dfrac{2 \times 2500[100 + 0]}{0.1 \times 5}} = 1000 \text{ غ ق. ق} \\ Q_{500-2500} = \sqrt{\dfrac{2 \times 2500[100 + 125]}{0.1 \times 4.75}} \cong 1539 \text{ ق. ق} \\ Q_{2500-5000} = \sqrt{\dfrac{2 \times 2500[100 + 500]}{0.1 \times 4.6}} = 2553.8 \text{ ق. ق} \\ Q_{5000-\infty} = \sqrt{\dfrac{2 \times 2500[100 + 1000]}{0.1 \times 4.5}} = 3496.03 \end{cases}$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود تنها Q=1539 و Q=2553.8 در بازه خود قـرار دارنـد. از اینـرو بـرای تعیـین مقدار اقتصادی سفارش بایستی هزینه کل را در این دو نقطه محاسـبه و آنکـه کمتـرین هزینـه را دارد بـه عنوان نقطه اقتصادی سفارش انتخاب نمود:

$$Tc_j(Q)=\frac{D}{Q}\left[A+R(q_j)-C_jq_j\right]+\frac{iC_jQ}{2}+i\frac{R(q_j)}{2}-iC_j\frac{q_j}{2}+C_jD=$$
$$\frac{2500}{Q}\left[100+R(q_j)-C_jq_j\right]+\frac{0.1C_jQ}{2}+0.1\frac{R(q_j)}{2}-0.1C_j\frac{q_j}{2}+2500C_j\rightarrow$$
$$\begin{cases}Tc(1539)\cong 12612\\ Tc(2553.8)\cong 12700\end{cases}$$

با توجه به مقایسه هزینه‌ها مقدار اقتصادی سفارش برابر با ۱۵۳۹ است.

**مثال ۹-** یک عرضه کننده ابزار فلزی قیمت Q واحد ابزار را بصورت 400+25Q واحد پولی اعلام کرده است. یکی از خریداران این ابزار به ۲۰۰۰ واحد از این کالا در سال نیاز دارد. این خریدار ابزارها را با نرخ ثابت مصرف می‌نماید. چنانچه، هزینه‌های مستقیم برای صدور سفارش، دریافت، بازرسی و سایر هزینه‌هایی که برای هر محموله باید پرداخت شود ۲۰ واحد پولی برای هر سفارش و نرخ هزینه نگهداری موجودی ۲۰٪ در سال باشد، مقدار اقتصادی سفارش را بدست آورید:

**پاسخ:**

$$D=2000\,,\quad A=20\,,\quad R(Q)=400+25Q\,,\quad C=\frac{R(Q)}{Q},\quad L=3\ \text{ماه}$$

$$Tc(Q)=\text{هزینه سفارش‌دهی}+\text{هزینه نگهداری}+\left(\text{هزینه متوسط هر واحد}\right)\times\text{نرخ خرید سالیانه}$$
$$=\frac{AD}{Q}+\frac{iCQ}{2}+\frac{R(Q)D}{Q}$$
$$=\frac{20(2000)}{Q}+\frac{0.2Q}{2}\times\left[\frac{400+25Q}{Q}\right]+2000\times\left[\frac{400+25Q}{Q}\right]$$
$$=\frac{40000}{Q}+0.1[400+25Q]+2000\times\left[\frac{400}{Q}+25\right]$$

برای بدست آوردن مقدار اقتصادی سفارش از تابع هزینه کل نسبت به Q مشتق گرفته برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial Tc(Q)}{\partial Q}=0\ \rightarrow -\frac{40000}{Q^2}+2.5Q-2000\times\frac{400}{Q^2}=0\rightarrow Q^*=580$$

## ۲-۳-۷ نکات مربوط به مدل تخفیف نموی

۱. در رسم منحنی هزینه کل، اگر m نقطه شکست وجود داشته باشد، m+1 منحنی هزینه کل را بوجود می‌آورند.

۲. اگر قیمت‌ها یکسان باشد، به ازای یک Q مشخص، هزینه خرید در تخفیف نموی بیشتر از تخفیف کلی است.

۳. حالت تخفیف زمانی مطرح می‌شود که کمبود مجاز نباشد.

## ۶-۷ تمرین

**۱.** قیمت خرید هر واحد کالایی برابر ۲ تومان و میزان تقاضای سالیانه آن ۱۰۰۰ واحد می‌باشد. هزینه نگهداری سالیانه هر واحد کالا ۲ تومان بوده و هزینه انجام یک سفارش وابسته به مقدار سفارش و چنین است:

۱۰ تومان اگر کمتر از ۱۱۰ واحد سفارش داده شود و ۸ تومان اگر بیش از ۱۱۰ واحد سفارش داده شود. اندازه بهینه سفارش‌دهی چند واحد خواهد بود.

**۲.** برای خرید یک نوع کالا، فروشنده به ازاء مقادیر مختلف سفارش تخفیفی قائل نمی‌شود، ولی شرکت حمل و نقل هزینه‌های حمل کالا را بصورت زیر پیشنهاد نموده است:

| مقدار سفارش | واحد هزینه حمل (کیلو/ ریال) |
|---|---|
| $0 < q < 10000$ | 2.5 |
| $q \geq 10000$ | 1.5 |

هزینه هربار سفارش کالا ۴۰۰ ریال و واحد هزینه نگهداری (انبارداری) کالا ۰/۱ ریال در کیلو- سال و مصرف سالیانه کالا ۵۰۰ کیلو است. در این شرایط مقدار اقتصادی هر بار سفارش کالا را بدست آورید؟

**۳.** کالایی را در نظر بگیریدکه برای آن تخفیف‌های افزایشی بصورت زیر در دسترس باشند. چنانچه نرخ تقاضا ۵۰۰ واحد در سال، نرخ هزینه نگهداری ۰/۲ و هزینه سفارش‌دهی ۵۰ واحد پولی باشد، مقدار اقتصادی سفارش را بدست آورید:

| مقدار سفارش | قیمت خرید |
|---|---|
| $0 < q < 100$ | 100 |
| $q \geq 100$ | 98 |

**۴.** مصرف کالایی ۱۸۰ تن در سال است. هزینه هر بار سفارش‌دهی ۳۲۰۰ واحد پول و هزینه نگهداری هر واحد کالا در سال ۲۰ واحد پول می‌باشد. یکی از فروشندگان پیشنهادی به صورت تخفیف تدریجی به ازاء بخش‌های مختلف یک سفارش به شرح زیر اعلام کرده است:

| مقدار از کل سفارش | قیمت هر تن برای این مقدار |
|---|---|
| تا ۲۰۰ تن اول | ۴۰۰ واحد پول |
| تا ۴۰۰ تن بعدی | ۳۸۰ واحد پول |
| مقادیر بعدی | ۳۶۰ واحد پول |

اقتصادی‌ترین مقدار سفارش و هزینه سالیانه مربوط به آن را محاسبه کنید.

**۵.** شرکتی می‌تواند هر واحد ماده اولیه مورد نیاز خود را از یک منبع عرضه کننده به مبلغ ۰/۰۶ تومان خریداری نماید. این قیمت برای ۱۰۰۰ واحد اولیه بوده و هر واحد اضافی از مقدار مذکور به

مبلغ ۰/۰۵۸ تومان قابل خرید است. شرکت در سال نیاز به ۵۰۰۰۰ واحد ماده اولیه فوق دارد. هزینه ثابت سفارش یک تومان بوده و نرخ هزینه نگهداری موجودی ۰/۲۵ است. مقدار خرید بهینه را محاسبه کنید.