

# فصل هشتم

## برنامه ریزی مدل های قطعی و پویا

- مقدمه
- فرضیات مدل های پویا
- روش های حل مدل
- تمرین



## ۸-۱ مقدمه

در این فصل به توضیح مدل‌هایی از موجودی می‌پردازیم که در آن‌ها تقاضا برای دوره‌های<sup>۱</sup> آتی مشخص و قطعی اما در طول برنامه‌ریزی تغییر می‌کند (یعنی در هر دوره با دوره‌های مختلف، میزان تقاضا تغییر کند)، به چنین مدل‌هایی، مدل‌های قطعی و پویا گفته می‌شود. برای مثال، یک کارخانه تولید کننده وسایل خانگی نظیر بخاری و کولر را در نظر بگیرید. به طور معمول چنین کارخانه‌ای در ماه‌های اول بهار به تولید لوازم مورد استفاده تابستان نظیر انواع کولر می‌پردازد و در ماه‌های اول پاییز بیشترین مقدار تولید مربوط به لوازم انواع بخاری را دارد. در این کارخانه تقاضا در فصول مختلف برای کولر و بخاری متفاوت ولی قطعی است. مدل‌های مورد بحث در این فصل، به دستیابی سیاست‌های مناسب و اقتصادی برای سفارشات و نگهداری کالا و قطعات در این شرایط می‌پردازند.

## ۸-۲ فرضیات مدل‌های پویا

فرضیات این مدل‌ها مانند مدل EOQ است با این تفاوت که:

۱. تقاضا قطعی و پویا است.
۲. کمبود موجودی جایز نیست.
۳. در هر دوره مقداری سفارش داریم و یا از موجودی دوره قبل استفاده می‌کنیم (حالت ترکیبی وجود ندارد). به عبارت دیگر، اگر در انتهای یک دوره موجودی داشته باشیم در دوره بعد از آن سفارش نمی‌دهیم. مقدار موجودی پایان دوره باید جوابگوی نیاز حداقل یک دوره بعد باشد. یعنی اینکه مقدار سفارش در ابتدای هر دوره یا صفر است یا معادل تقاضای یک یا چند دوره آینده است.
۴. به مقداری سفارش می‌دهیم که مقدار تقاضای یک یا چند دوره (تعداد صحیح از دوره‌ها) را پوشش دهد. به عبارت دیگر اگر قرار باشد که مثلاً تقاضای دوره چهارم از دوره اول تامین گردد، تقاضای دوره دوم و سوم نیز باید از دوره اول تامین گردد.
۵. هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهایی محاسبه می‌گردد که از یک دوره به دوره دیگر منتقل می‌شوند.
۶. مقدار سفارش داده شده بصورت یکجا در اول دوره دریافت می‌شود.
۷. در این مدل‌ها هزینه هر بار سفارش دهی  $A$  و هزینه نگهداری هر واحد در دوره  $h$  است.

هدف این مدل‌ها دستیابی به سیاست بهینه‌ای است که مشخص نماید سفارشات در ابتدای کدام یک از دوره‌ها<sup>۲</sup> و به چه مقدار به انبار برسند تا جمع هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری را در کل افق برنامه‌ریزی به حداقل برسد.

<sup>۱</sup> تعریف دوره: فاصله زمانی تعیین شده که تقاضا در آن مشخص بوده (قطعی بوده) ولی با تقاضا در دوره‌های دیگر متفاوت است. دوره می‌تواند روز، هفته، ماه، سال و یا هر بازه زمانی ثابتی باشد.

<sup>۲</sup> قابل ذکر است که نقاط مشخص شده محل دریافت سفارش است و سفارش  $L$  زمان قبل صادر می‌شود.

### ۳-۸ روش‌های حل مدل

روش‌های موجود برای حل مدل‌های قطعی و پویا اکثراً بصورت هیوریستیک (ابتکاری) بوده و جواب‌های بهینه یکسانی برای تمامی توابع هدف ارائه نمی‌دهند. بنابراین برحسب شرایط مدل، برخی از روش‌ها به جواب‌های بهتری منتجر می‌شوند. ساده‌ترین روش، نوشتن تمامی ترکیبات ممکن و انتخاب ترکیبی است که مجموع هزینه‌های آن کوچکتر باشد. به عنوان مثال، فرض کنید میزان تقاضا برای ۳ دوره آتی به شرح زیر باشد:

دوره	۱	۲	۳
تقاضا	۸	۵	۱۰

با توجه به فرضیات مدل، مقادیر سفارش باید یک یا چند دوره کامل را بپوشاند. بنابراین، ترکیبات ممکن برای سفارشات در این مثال برابر با ۴ خواهند بود که عبارتند از:

ترکیب ۱: سفارش ۲۳ واحد در ابتدای دوره ۱ برای هر ۳ دوره،

ترکیب ۲: سفارش ۱۳ واحد در ابتدای دوره ۱ برای دوره‌های ۱ و ۲ و سفارش ۱۰ واحد در ابتدای دوره ۳ برای دوره ۳،

ترکیب ۳: سفارش ۸ واحد در ابتدای دوره ۱ برای دوره ۱ و سفارش ۱۵ واحد در ابتدای دوره ۲ برای مصارف دوره ۲ و ۳،

ترکیب ۴: سفارش ۸ واحد در ابتدای دوره ۱، ۵ واحد در ابتدای دوره ۲ و ۱۰ واحد در ابتدای دوره ۳.

توجه داشته باشیم که مقدار موجودی باقی‌مانده در دوره‌ها به ازای ترکیب‌های سفارش‌دهی بالا کاملاً متفاوت بوده و هزینه‌های انبارداری را متفاوت خواهد کرد. در ۴ ترکیب بالا داریم:

#### ترکیب ۱:

فرض کنید هزینه سفارش‌دهی ۲ واحد پولی و هزینه نگهداری ۱۰ واحد پولی در سال باشد،

$$10 \times (15 + 10) = 250, \text{ کل هزینه نگهداری سالیانه}$$

$$2 \times 1 = 2 \text{ کل هزینه سفارش‌دهی}$$

$$250 + 2 = 252 \text{ کل هزینه سفارش‌دهی} + \text{کل هزینه نگهداری سالیانه} = \text{کل هزینه سالیانه}$$

#### ترکیب ۲:

$$10 \times (5 + 0) = 50, \text{ کل هزینه نگهداری سالیانه}$$

$$2 \times (2) = 4 \text{ کل هزینه سفارش‌دهی}$$

$$50 + 4 = 54 \text{ کل هزینه سفارش‌دهی} + \text{کل هزینه نگهداری سالیانه} = \text{کل هزینه سالیانه}$$

#### ترکیب ۳:

$$10 \times (0 + 10) = 100, \text{ کل هزینه نگهداری سالیانه}$$

$$2 \times (4) = 4 \text{ کل هزینه سفارش‌دهی}$$

$$100 + 4 = 104 \text{ کل هزینه سفارش‌دهی} + \text{کل هزینه نگهداری سالیانه} = \text{کل هزینه سالیانه}$$

## ترکیب ۴:

$$10 \times (0 + 0) = 0, \text{ کل هزینه نگهداری سالیانه}$$

$$2 \times (3) = 6 \text{ کل هزینه سفارش دهی}$$

$$0 + 6 = 6 \text{ کل هزینه سفارش دهی} + \text{کل هزینه نگهداری سالیانه} = \text{کل هزینه سالیانه}$$

همانطور که ملاحظه می شود ترکیب ۴ کمترین هزینه و ترکیب ۱ بالاترین هزینه دارد. اما برای یک افق برنامه ریزی N دوره ای، با بزرگتر شدن N، تعداد ترکیب های ممکن به صورت نمایی اضافه می شوند. در حقیقت تعداد ترکیب های ممکن برای یک افق N دوره ای برابر  $2^{N-1}$  ترکیب خواهد بود<sup>۱</sup>. بنابراین نوشتن تمامی ترکیبات ممکن و مقایسه هزینه کل روش مناسبی به نظر نمی رسد. از اینرو لازم است تا روش های بهتری با صرف زمان کمتر ارائه شوند. روش ها عبارتند از:

۱. دسته به دسته (Lot for Lot)
۲. مقدار سفارش ثابت (FOS)
۳. فاصله زمانی ثابت دو سفارش متوالی (FOI)
۴. حداقل هزینه هر واحد، LUC (Least Unit Cost)
۵. حداقل هزینه کل، LTC (Lest Total Cost or Part Period Balancing)
۶. سیلور-میل Silver-Meal
۷. واگنر وی تین، W.W (Wagner-Whitin)
۸. فوردیس-وبستر، F.W (Fordyce-Webster)

## ۸-۳-۱ روش دسته به دسته (Lot for Lot)

در این روش در هر دوره به میزان مقدار مصرف در آن دوره سفارش داده می شود. همانگونه که در فرضیات مدل های پویا بیان گردید، هزینه نگهداری فقط برای موجودی هایی است که از یک دوره به دوره بعدی منتقل می شوند، در روش LFL چون به اندازه ی مصرف هر دوره سفارش صادر می شود، بنابراین در انتهای هر دوره موجودی صفر و بنابراین هزینه نگهداری کالا نیز صفر خواهد بود. در مقابل به علت افزایش تعداد دفعات سفارش (سفارش در هر دوره)، هزینه سفارش دهی حداکثر است.

**مثال ۱-** فرض کنید میزان تقاضا برای ۶ دوره آتی به شرح زیر باشد، چنانچه هزینه سفارش دهی ۲ واحد پولی و هزینه نگهداری ۱۰ واحد پولی در سال باشد، تعداد دوره های سفارش دهی، مقدار سفارش در هر دوره و هزینه کل سالیانه را با استفاده از روش LFL بدست آورید:

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تقاضا	۲۰	۳۵	۱۸۰	۱۵۴	۲۸	۱۵

<sup>۱</sup>. اگر افق برنامه ریزی شامل N دوره باشد، تعداد N-1 موقعیت برای حضور یا عدم حضور دیواره های جداکننده سفارش ایجاد می شود. حال با توجه به اینکه یک مدل ترکیبی شامل N-1 وضعیت داریم، و در هر وضعیت می تواند دو حالت "وجود دیواره" یا "نبود دیواره" قرار بگیرد، تعداد ترکیب های ممکن برابر با  $2^{N-1}$  خواهد بود.

**پاسخ:**

چنانچه در ابتدای دوره ۱، ۲۰ واحد، در ابتدای دوره ۲، ۳۵ واحد، در ابتدای دوره ۳، ۱۸۰ واحد و ... سفارش صادر گردد، از روش Lot for Lot استفاده شده است. برای درک بهتر نمودار زیر را ببینید:

$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$	$D_6$
۲۰	۳۵	۱۸۰	۱۵۴	۲۸	۱۵

$$\text{کل هزینه نگهداری سالیانه} = 10 \times (0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 0,$$

$$\text{کل هزینه سفارش‌دهی} = 2 \times 6 = 12$$

$$\text{کل هزینه سالیانه} = 0 + 12 = 12$$

همانطور که مشاهده می‌شود هزینه سفارش‌دهی حداکثر مقدار ممکن و هزینه نگهداری حداقل مقدار ممکن را خواهد داشت.

**۲-۳-۸ روش مقدار سفارش ثابت**

در این روش مقدار سفارش ثابت است. این مقدار سفارش ثابت می‌تواند برحسب تجربه و یا از فرمول ویلسون ( $Q_w$ ) بدست آمده باشد و در ابتدای دوره‌هایی که میزان موجودی توان پاسخگویی به تقاضاها را نداشته باشد، صادر می‌گردد.

**مثال ۲-** فرض کنید میزان تقاضا برای ۶ دوره آتی به شرح زیر باشد، چنانچه مقدار ثابت سفارش  $Q=200$ ، هزینه سفارش‌دهی ۲ واحد پولی و هزینه نگهداری ۱۰ واحد پولی در سال باشد، تعداد دوره‌های سفارش-دهی و کل هزینه سالیانه را بدست آورید:

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تقاضا	۲۰	۳۵	۱۸۰	۱۵۴	۲۸	۱۵

**پاسخ:**

با توجه به مقدار ثابت سفارش ۲۰۰ واحد:

دوره سفارش‌دهی ۱:

چنانچه فقط تقاضای دوره اول تامین گردد:

$$D_1 = 20 \leq 200$$

چنانچه تقاضای دوره ۱ و ۲ تامین گردد:

$$D_1 + D_2 = 20 + 35 = 55 \leq 200$$

چنانچه تقاضای دوره ۱، ۲ و ۳ تامین گردد:

$$D_1 + D_2 + D_3 = 20 + 35 + 180 = 235 \geq 200$$

بنابراین دوره اول سفارش‌دهی شامل دوره‌های ۱ و ۲ با مجموع تقاضای ۵۵ واحد خواهد بود. در پایان این دوره مقدار ۱۴۵ واحد موجودی ( $۱۴۵ = ۵۵ - ۲۰۰$ ) به ابتدای دوره بعد منتقل می‌گردد.

#### دوره سفارش‌دهی ۲:

چنانچه فقط تقاضای دوره ۳ تامین گردد:

$$D_3 = 180 \leq 200 + 145$$

چنانچه تقاضای دوره ۳ و ۴ تامین گردد:

$$D_3 + D_4 = 180 + 154 = 334 \leq 200 + 145$$

چنانچه تقاضای دوره ۳، ۴ و ۵ تامین گردد:

$$D_3 + D_4 + D_5 = 180 + 154 + 28 = 362 \geq 200 + 145$$

بنابراین دوره دوم سفارش‌دهی شامل دوره‌های ۳ و ۴ با مجموع تقاضای ۳۳۴ واحد خواهد بود. در پایان این دوره مقدار ۱۱ واحد موجودی ( $۱۱ = ۳۳۴ - ۳۴۵$ ) به ابتدای دوره بعد منتقل می‌گردد.

#### دوره سفارش‌دهی ۳:

چنانچه فقط تقاضای دوره ۵ تامین گردد:

$$D_5 = 28 \leq 200 + 11$$

چنانچه تقاضای دوره ۵ و ۶ تامین گردد:

$$D_5 + D_6 = 28 + 15 = 43 \leq 200 + 11$$

بنابراین دوره سوم سفارش‌دهی شامل دوره‌های ۵ و ۶ با مجموع تقاضای ۴۳ واحد خواهد بود. در پایان این دوره به مقدار ۱۶۸ واحد موجودی باقی‌مانده هزینه نگهداری تعلق می‌گیرد ( $۱۶۸ = ۴۳ - ۲۱۱$ ).  
مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی به شرح زیر خواهد بود:

$$10 \times (180 + 145 + 165 + 11 + 183 + 168) = 8520 ,$$

$$2 \times 3 = 6 \text{ کل هزینه سفارش‌دهی}$$

$$8520 + 6 = 8526 \text{ کل هزینه سفارش‌دهی} + \text{کل هزینه نگهداری سالیانه} = \text{کل هزینه سالیانه}$$

برای درک بهتر نمودار زیر را ببینید:

$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$	$D_6$
۲۰	۳۵	۱۸۰	۱۵۴	۲۸	۱۵
↓ ۲۰۰		↓ ۲۰۰		↓ ۲۰۰	

حال فرض کنید  $Q$  با استفاده از روش ویلسون ( $Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$ ) تعیین گردد، در این حالت  $D$  برابر

میانگین تقاضا در دوره‌ها است.

**مثال ۳-** مصرف کالایی در ۸ دوره بصورت زیر است، چنانچه هزینه نگهداری هر واحد کالا ۰/۵ واحد پولی در سال و هزینه سفارش‌دهی آن ۳۰ واحد پولی باشد، با استفاده از روش FOS با  $Q_w$  مقدار سفارش در هر دوره را تعیین نمایید.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تقاضا	۶۰	۳۰	۱۵	۱۵	۲۰	۴۰	۲۵	۳۵

**پاسخ:**

$$D = \frac{60 + 30 + 15 + 15 + 20 + 40 + 25 + 35}{8} = 30$$

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2(30)(30)}{0.5}} = 60$$

با توجه به مقدار ثابت سفارش ۶۰ واحد:

دوره سفارش‌دهی ۱:

چنانچه فقط تقاضای دوره اول تامین گردد:

$$D_1 = 60 \leq 60$$

بنابراین دوره اول سفارش‌دهی شامل دوره‌ی ۱ با تقاضای ۶۰ واحد خواهد بود. در پایان این موجودی به ابتدای دوره بعد منتقل نمی‌شود.

دوره سفارش‌دهی ۲:

چنانچه فقط تقاضای دوره ۲ تامین گردد:

$$D_2 = 30 \leq 60$$

چنانچه تقاضای دوره ۲ و ۳ تامین گردد:

$$D_2 + D_3 = 30 + 15 = 45 \leq 60$$

چنانچه تقاضای دوره ۲، ۳ و ۴ تامین گردد:

$$D_2 + D_3 + D_4 = 30 + 15 + 15 = 60 \leq 60$$

بنابراین دوره دوم سفارش‌دهی شامل دوره‌های ۲، ۳ و ۴ با مجموع تقاضای ۶۰ واحد خواهد بود. در پایان این دوره نیز موجودی به ابتدای دوره بعد منتقل نمی‌شود.

دوره سفارش‌دهی ۳:

چنانچه فقط تقاضای دوره ۵ تامین گردد:

$$D_5 = 20 \leq 60$$

چنانچه تقاضای دوره ۵ و ۶ تامین گردد:

$$D_5 + D_6 = 20 + 40 = 60 \leq 60$$

بنابراین دوره سوم سفارش‌دهی شامل دوره‌های ۵ و ۶ با مجموع تقاضای ۶۰ واحد خواهد بود. در پایان این دوره نیز موجودی به ابتدای دوره بعد منتقل نمی‌شود.

دوره سفارش دهی ۴:

چنانچه فقط تقاضای دوره ۷ تامین گردد:

$$D_7 = 25 \leq 60$$

چنانچه تقاضای دوره ۷ و ۸ تامین گردد:

$$D_7 + D_8 = 25 + 35 = 60 \leq 60$$

بنابراین دوره چهارم سفارش دهی شامل دوره های ۷ و ۸ با مجموع تقاضای ۶۰ واحد خواهد بود. در پایان این دوره نیز موجودی به صفر می رسد.

مجموع هزینه های نگهداری و سفارش دهی به شرح زیر خواهد بود:

$$0.5 \times (0 + 30 + 15 + 0 + 40 + 0 + 35 + 0) = 60,$$

$$\text{کل هزینه سفارش دهی} = 30 \times 4 = 120$$

$$60 + 120 = 180 = \text{کل هزینه سفارش دهی} + \text{کل هزینه نگهداری سالیانه}$$

برای درک بهتر نمودار زیر را ببینید:

$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$	$D_6$	$D_7$	$D_8$
۶۰	۳۰	۱۵	۱۵	۲۰	۴۰	۲۵	۳۵
↓ ۶۰	↓ ۶۰			↓ ۶۰		↓ ۶۰	

### ۳-۳-۸ روش فاصله زمانی ثابت دو سفارش متوالی

در این روش تعداد دوره های سفارش دهی ثابت است. یعنی سفارش در بازه های زمانی یکسان دریافت می گردد. در روش FOI چون سفارش به اندازه تقاضای دوره سفارش دهی، صادر می شود در انتهای دوره ی سفارش دهی موجودی به صفر می رسد. فاصله زمانی ثابت سفارش دهی می تواند برحسب تجربه و یا از فرمول ویلسون ( $T_w$ ) بدست آمده باشد.

**مثال ۴-** فرض کنید میزان تقاضا برای ۶ دوره آتی به شرح زیر باشد، چنانچه فاصله زمانی دو سفارش ثابت و برابر  $T=2$ ، هزینه سفارش دهی ۲ واحد پولی و هزینه نگهداری ۱۰ واحد پولی در سال باشد، مقدار سفارش در هر دوره های سفارش دهی و کل هزینه سالیانه را بدست آورید:

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تقاضا	۲۰	۳۵	۱۸۰	۱۵۴	۲۸	۱۵

**پاسخ:**

با توجه به فاصله زمانی ثابت بین دو سفارش ( $T=2$ ):

دوره سفارش دهی ۱:

شامل تقاضای دوره ۱ و ۲:

$$D_1 + D_2 = 20 + 35 = 55$$



دوره سفارش‌دهی ۲:

شامل تقاضای دوره ۳ و ۴:

$$D_3 + D_4 = 180 + 154 = 334$$

دوره سفارش‌دهی ۳:

شامل تقاضای دوره ۵ و ۶:

$$D_5 + D_6 = 28 + 15 = 43$$

مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی به شرح زیر خواهد بود:

$$10 \times (35 + 0 + 154 + 0 + 15 + 0) = 2040 ,$$

$$\text{کل هزینه سفارش‌دهی} = 2 \times 3 = 6$$

$$2040 + 6 = 2046 = \text{کل هزینه سفارش‌دهی} + \text{کل هزینه نگهداری سالیانه} = \text{کل هزینه سالیانه}$$

برای درک بهتر نمودار زیر را ببینید:

$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$	$D_6$
۲۰	۳۵	۱۸۰	۱۵۴	۲۸	۱۵
↓ ۵۵		↓ ۳۳۴		↓ ۴۳	

حال فرض کنید  $T$  با استفاده از روش ویلسون  $\left(T = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}\right)$  تعیین گردد، در این حالت نیز،  $D$  برابر میانگین تقاضا در دوره‌ها است.

**مثال ۵-** مصرف کالایی در ۸ دوره بصورت زیر است، چنانچه هزینه نگهداری هر واحد کالا ۰/۱۵ واحد پولی در سال و هزینه سفارش‌دهی آن ۳۰ واحد پولی باشد، با استفاده از روش FOI با  $T_w$  مقدار سفارش در هر دوره و کل هزینه سالیانه را محاسبه نمایید.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تقاضا	۱۵	۲۵	۱۰	۶۰	۲۰	۲۵	۴۵	۴۰

پاسخ:

$$D = \frac{15 + 25 + 10 + 60 + 20 + 25 + 45 + 40}{8} = 30$$

$$T = \sqrt{\frac{2A}{Dh}} = \sqrt{\frac{2(30)}{30(0.15)}} = 2$$

با توجه به فاصله زمانی ثابت بین دو سفارش ( $T=2$ ):

دوره سفارش‌دهی ۱:

شامل تقاضای دوره ۱ و ۲:

$$D_1 + D_2 = 15 + 25 = 40$$

دوره سفارش‌دهی ۲:

شامل تقاضای دوره ۳ و ۴:

$$D_3 + D_4 = 10 + 60 = 70$$

دوره سفارش‌دهی ۳:

شامل تقاضای دوره ۵ و ۶:

$$D_5 + D_6 = 20 + 25 = 45$$

دوره سفارش‌دهی ۴:

شامل تقاضای دوره ۷ و ۸:

$$D_7 + D_8 = 45 + 40 = 85$$

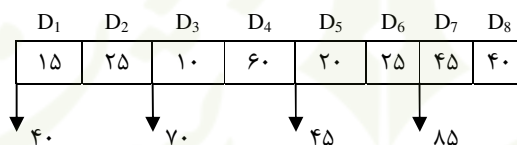
مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی به شرح زیر خواهد بود:

$$0.15 \times (25 + 0 + 60 + 0 + 25 + 0 + 40 + 0) = 22.5, \text{ کل هزینه نگهداری سالیانه}$$

$$30 \times 4 = 120 \text{ کل هزینه سفارش‌دهی}$$

$$22.5 + 120 = 142.5 \text{ کل هزینه سفارش‌دهی + کل هزینه نگهداری سالیانه = کل هزینه سالیانه}$$

برای درک بهتر نمودار زیر را ببینید:



#### ۴-۳-۸ روش حداقل هزینه هر واحد، LUC (Least Unit Cost)

در این روش سعی بر آن است که در هر مورد صدور سفارش، مقدار سفارش در حدی باشد که جمع هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری را به ازاء هر واحد کالا به حداقل برساند (رابطه ۸-۱).

$$LUC = \frac{\text{هزینه کل}}{\text{مقدار تقاضا}} = \frac{\text{هزینه نگهداری} + \text{هزینه سفارش‌دهی}}{\sum_{i=1}^j D_i} = \frac{A + h \sum_{i=1}^j (i-1) D_i}{\sum_{i=1}^j D_i} \quad (8-1)$$

ابتدا فرض کنید سفارش، تنها تقاضای دوره اول را شامل می‌شود، سپس دوره اول و دوم، آنگاه دوره اول، دوم و سوم و به همین ترتیب تا جایی که معیار توقف (حداقل هزینه به ازاء هر واحد کالا) برآورده شود، ادامه می‌یابد:

$$\begin{cases} LUC(j) < LUC(j-1) \\ LUC(j) < LUC(j+1) \end{cases} \quad (8-2)$$

چنانچه قیمت خرید (C) ثابت باشد، در اینصورت می‌توان جمع هزینه‌ها را به ازای هر دور سفارش‌دهی مطابق جدول ۸-۱ نوشت:

جدول ۸-۱ هزینه سفارش‌دهی و نگهداری در روش LUC

LUC	مجموع هزینه سفارش و نگهداری	هزینه نگهداری	هزینه سفارش	مقدار سفارش	تعداد دوره‌ها
$\frac{A}{D_1}$	A	0	A	$D_1$	1
$\frac{A + D_2 h}{D_1 + D_2}$	$A + D_2 h$	$D_2 h$	A	$D_1 + D_2$	2
$\frac{A + D_2 h + 2D_3 h}{D_1 + D_2 + D_3}$	$A + (D_2 + 2D_3)h$	$(D_2 + 2D_3)h$	A	$D_1 + D_2 + D_3$	3

مثال ۶- فرض کنید میزان تقاضا برای ۶ دوره آتی محصولی به شرح زیر است. چنانچه هزینه نگهداری هر واحد ۲ تومان و هزینه سفارش‌هی ۴۲ تومان باشد، تعداد دوره‌های سفارش‌دهی و مقدار سفارش در هر دوره را با استفاده از روش LUC بدست آورید.

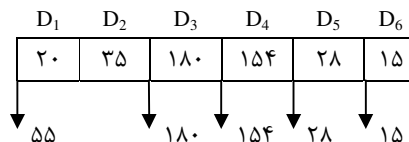
دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تقاضا	۲۰	۳۵	۱۸۰	۱۵۴	۲۸	۱۵

پاسخ:

برای حل مساله جدول زیر را تشکیل دهید:

LUC	$T_{c_h} + T_{c_s}$	$T_{c_h}$	$T_{c_s}$	Q	تعداد دوره‌ها
$LUC(1) = \frac{42}{20} = 2.1$	42	0	42	20	1
$LUC(2) = \frac{112}{45} = 2.036$	$42+70=112$	$2 \times 35=70$	42	$20+35$	2*
$LUC(3) = \frac{832}{235} = 3.54$	$42+790=832$	$2 \times (215+180)=790$	42	$20+35+180$	3
$LUC(3) = \frac{42}{180} = 0.234$	42	0	42	180	3*
$LUC(4) = \frac{350}{334} = 1.048$	$42+308=350$	$2 \times 154=308$	42	$180+154$	4
$LUC(4) = \frac{42}{154} = 0.273$	42	0	42	154	4*
$LUC(5) = \frac{98}{182} = 0.538$	$42+56=98$	$2 \times 28=56$	42	$154+28$	5
$LUC(5) = \frac{42}{28} = 1.5$	42	0	42	28	5*
$LUC(6) = \frac{72}{43} = 1.67$	$42+30=72$	$2 \times 15=30$	42	$28+15$	6
$LUC(6) = \frac{42}{15} = 2.8$	42	0	42	15	6*

نمودار سفارشات بطور خلاصه در شکل زیر رسم شده است:



**مثال ۷-** فرض کنید میزان تقاضا برای ۸ دوره آتی محصولی به شرح زیر باشد، چنانچه هزینه نگهداری هر واحد ۲ تومان و هزینه سفارش‌هی ۱۰۰ تومان باشد، تعداد دوره‌های سفارش‌دهی و مقدار سفارش در هر دوره را با استفاده از روش LUC بدست آورید.

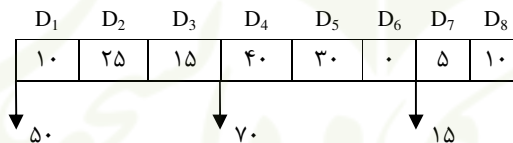
دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تقاضا	۱۰	۲۵	۱۵	۴۰	۳۰	۰	۵	۱۰

پاسخ:

برای حل مساله جدول زیر را تشکیل دهید:

تعداد دوره‌ها	Q	Tc <sub>s</sub>	Tc <sub>h</sub>	Tc <sub>h</sub> + Tc <sub>s</sub>	LUC
1	10	100	0	100	$LUC(1) = \frac{100}{10} = 10$
2	10+25	100	$2 \times 25 = 50$	$100 + 50 = 150$	$LUC(2) = \frac{150}{35} = 4.29$
3*	10+25+15	100	$2 \times (40+15) = 110$	$100 + 110 = 210$	$LUC(3) = \frac{210}{50} = 4.2$
4	10+25+15+40	100	$2 \times (80+55+40) = 350$	$100 + 350 = 450$	$LUC(4) = \frac{450}{90} = 5$
4	40	100	0	100	$LUC(4) = \frac{100}{40} = 2.5$
5	40+30	100	$2 \times 30 = 60$	$100 + 60 = 160$	$LUC(5) = \frac{160}{70} = 2.29$
6*	40+30+0	100	$2 \times (30+0) = 60$	$100 + 60 = 160$	$LUC(6) = \frac{160}{70} = 2.29$
7	40+30+0+5	100	$2 \times (35+5+5) = 90$	$100 + 90 = 190$	$LUC(7) = \frac{190}{75} = 2.54$
7	5	100	0	100	$LUC(7) = \frac{100}{5} = 20$
8*	5+10	100	$2 \times 10 = 20$	$100 + 20 = 120$	$LUC(8) = \frac{120}{15} = 8$

نمودار سفارشات بطور خلاصه در شکل زیر رسم شده است:



### ۵-۳-۸ روش حداقل هزینه کل، LTC (Lest Total Cost or Part Period Balancing)

در این روش ملاک تعیین تعداد دوره بهینه، نزدیکی هزینه نگهداری و سفارش‌دهی به یکدیگر است. برای نیل به این هدف باید قدرمطلق اختلاف بین هزینه‌های نگهداری و سفارش کمترین مقدار همگن را داشته باشد و قسمتی انتخاب می‌شود که این اختلاف حداقل شود<sup>۱</sup>.

$$\text{هزینه نگهداری} = h \sum_{i=1}^j D_i (i - 1) \quad (8-3)$$

$$\text{هزینه سفارش دهی} = A \quad (8-4)$$

چنانچه قیمت خرید (C) ثابت باشد، در اینصورت می‌توان جمع هزینه‌ها را به ازای هر دور سفارش‌دهی مطابق جدول ۸-۲ نوشت:

<sup>۱</sup> . همانطور که در فصل ۳ نشان داده شد، در نقطه Q<sub>و</sub> هزینه نگهداری با هزینه سفارش‌دهی برابر است. بنابراین هرچه اختلاف این دو هزینه کوچکتر باشد به نقطه بهینه نزدیکتر خواهیم شد.

جدول ۸-۲ هزینه سفارش‌دهی و نگهداری در روش LTC

تعداد دوره	مقدار سفارش	هزینه سفارش	هزینه نگهداری	اختلاف هزینه سفارش و نگهداری
1	$D_1$	A	0	A
2	$D_1 + D_2$	A	$D_2 h$	$ A - D_2 h $
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
j	$\sum_{i=1}^j D_i$	A	$h \sum_{i=1}^j D_i (i-1)$	$ A - h \sum_{i=1}^j D_i (i-1) $

**مثال ۸-** فرض کنید میزان تقاضا برای ۸ دوره آتی محصولی به شرح زیر باشد، چنانچه هزینه نگهداری هر واحد ۲ تومان و هزینه سفارش‌هی ۱۰۰ تومان باشد، تعداد دوره‌های سفارش‌دهی و مقدار سفارش در هر دوره را با استفاده از روش LTC بدست آورید.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تقاضا	۱۰	۲۵	۱۵	۴۰	۳۰	۰	۵	۱۰

پاسخ:

برای حل جدول زیر را تشکیل دهید:

تعداد دوره	Q	$Tc_s = A$	$Tc_h = \sum_{i=1}^j D_i (i-1)$	$ A - \sum_{i=1}^j D_i (i-1) $
1	10	100	0	100
2	10+25	100	$2 \times 25 = 50$	50
3	10+25+15	100	$2 \times (40+15) = 110$	10
4	10+25+15+40	100	$2 \times (80+55+40) = 350$	250
4	40	100	0	100
5	40+30	100	$2 \times 30 = 60$	40
6	40+30+0	100	$2 \times (30+0) = 60$	40
7	40+30+0+5	100	$2 \times (35+5+5) = 90$	10
8	40+30+0+5+10	100	$2 \times (45+15+15+10) = 170$	70

بنابراین برای بار دوم برای چهار دوره و به میزان ۷۵ واحد سفارش می‌دهیم و برای آخرین بار برای یک دوره و میزان ۱۰ واحد سفارش خواهیم داد. نمودار حاصل بصورت زیر خواهد شد:

$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$	$D_6$	$D_7$	$D_8$
۱۰	۲۵	۱۵	۴۰	۳۰	۰	۵	۱۰
↓			↓				↓
۵۰			۷۵				۱۰

### ۸-۳-۶ روش سیلور - میل Silver-Meal

در این روش، هزینه سفارش‌دهی و نگهداری، هزینه‌های مهم برای سازمان می‌باشند و هدف این روش، کمینه کردن مجموع این دو هزینه به ازاء هر دوره می‌باشد. بنابراین تفاوت این روش با روش LUC در این است که مجموع هزینه‌ها بر تعداد دوره تقسیم می‌گردد یعنی:

$$SC(j) = \frac{\text{هزینه نگهداری} + \text{هزینه سفارش دهی}}{T} = \frac{A + h \sum_{i=1}^j (i-1) D_i}{T} \quad (8-5)$$

این فرآیند را تا زمانی ادامه می‌دهیم که هر دو شرط زیر برقرار شوند:

$$\begin{cases} SC(j) < SC(j-1) \\ SC(j) < SC(j+1) \end{cases} \quad (8-6)$$

**مثال ۹-** فرض کنید میزان تقاضا برای ۸ دوره آتی محصولی به شرح زیر باشد، چنانچه هزینه نگهداری هر واحد ۲ تومان و هزینه سفارش‌هی ۱۰۰ تومان باشد، تعداد دوره‌های سفارش‌دهی و مقدار سفارش در هر دوره را با استفاده از روش سیلور-میل بدست آورید.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تقاضا	۱۰	۲۵	۱۵	۴۰	۳۰	۰	۵	۱۰

**پاسخ:**

برای حل جدول زیر را تشکیل دهید:

تعداد دوره	Q	$Tc_s = A$	$Tc_h = \sum_{i=1}^j D_j(i-1)$	$SC(j) = \frac{A+h \sum_{i=1}^j (i-1)D_i}{T}$
1	10	100	0	100
2	10+25	100	$2 \times 25 = 50$	75
3*	10+25+15	100	$2 \times (40+15) = 110$	70
4	10+25+15+40	100	$2 \times (80+55+40) = 350$	112.5
5	40	100	0	100
6	40+30	100	$2 \times 30 = 60$	80
7*	40+30+0+5	100	$2 \times (35+5) = 90$	47.5
8	40+30+0+5+10	100	$2 \times (45+15+15+10) = 170$	54

بنابراین برای بار دوم برای چهار دوره و به میزان ۷۵ واحد سفارش می‌دهیم و برای آخرین بار برای یک دوره و میزان ۱۰ واحد سفارش خواهیم داد. نمودار حاصل بصورت زیر خواهد شد:

$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$	$D_6$	$D_7$	$D_8$
۱۰	۲۵	۱۵	۴۰	۳۰	۰	۵	۱۰
↓			↓				↓
۵۰			۷۵				۱۰

## ۴-۸ تمرین

۱. تقاضای محصولی طی دوره‌های مختلف (هفتگی) بصورت زیر است. در صورتیکه هزینه هربار سفارش ۲۰۰ تومان و هزینه نگهداری هر واحد محصول در هفته ۲ واحد پولی باشد، مقدار اولین سفارش برطبق روش سیلور-میل به چه میزان خواهد بود؟

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تقاضا	۱۰۰	۵۰	۴۰	۹۰	۱۵۰	۱۵۰	۲۰۰	۱۰۰

۲. فرض کنید میزان تقاضا برای ۹ دوره آتی محصولی به شرح زیر باشد:

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تقاضا	۵	۴	۸	۲	۲	۱۰	۴	۸	۲

- چنانچه هزینه هر بار سفارش‌دهی کالا ۲۰ واحد پولی و هزینه نگهداری در دوره‌ها متغیر و به صورت جدول زیر باشد، مناسب‌ترین برنامه سفارش را با استفاده از روش LUC بدست آورید.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تقاضا	۳	۳	۳	۴	۴	۴	۳	۳	۳

۳. مقادیر تخمین زده شده مصرف کالایی برای دوره‌های ۷ تا ۱۳ به شرح جدول زیر است:

دوره	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تقاضا	۱۰	۱۰	۱۰	۴۰	۶۰	۳۰	۵

- اگر هزینه نگهداری هر واحد کالا در یک دوره ۰/۰۲۹ واحد پولی و هزینه هر بار سفارش‌دهی ۵ واحد پولی باشد، مناسب‌ترین برنامه سفارشات براساس روش LTC چه خواهد بود؟

۴. مصرف یک نوع ماده شیمیایی در ۸ ماهه اول سال به شرح زیر است:

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تقاضا	۱۸	۹	۰	۱۵	۲۴	۰	۳	۶

- اگر هزینه نگهداری ۳۰ واحد پولی در هر ماه و هزینه هر بار سفارش‌دهی ۲۷۰ واحد پولی باشد، مناسب‌ترین برنامه سفارشات براساس روش سیلور-میل چه خواهد بود؟

۵. مقادیر تقاضای محصولی در ۱۰ دوره آینده به شرح زیر است:

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تقاضا	۳۰	۶۰	۸۰	۶۰	۵۰	۳۰	۷۰	۱۰۰	۶۰	۴۰

اگر هزینه نگهداری هر واحد محصول در هر دوره ۲ واحد پولی و هزینه هر بار سفارش دهی ۸۰ واحد پولی باشد، اولین و دومین سفارش با استفاده از روش LUC چقدر خواهد بود؟

