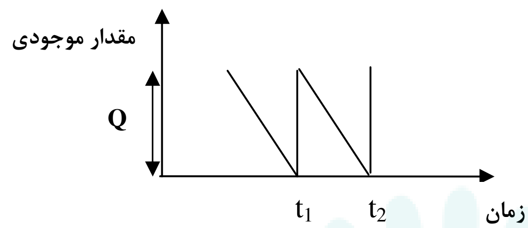
فصل پنجم

مدل مقدار تولید اقتصادی E. P. Q

- ***مقدمه***
- ***نحوه محاسبه روابط مدل***
- ***محاسبه نقطه سفارش مجدد***
- ***مدل EPQ هنگامیکه کمبود مجاز و قابل جبران باشد***
- ***تمرین***

۱–۵ مقدمه

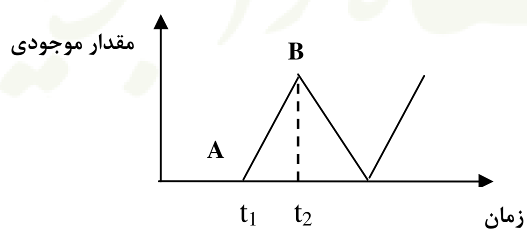
در مدل‌های قبلی فرض براین بود که در هر بار، مقدار سفارش در یک آن دریافت می‌شود (دریافت به صورت آنی و مصرف به شکل تدریجی و یکنواخت). با چنین فرضی، منحنی مقدار موجودی، برای یک کالا در طول زمان می‌توانست مانند شکل ۱–۵ باشد:



شکل ۱–۵ منحنی موجودی خالص در حالت دریافت آنی

برای این کالا، ۲بار سفارش انجام شده و در زمان‌های t_1 و t_2 سفارشات با حجم Q دریافت شده‌اند. از آنجا که دریافت سفارش در زمان‌های t_1 و t_2 بصورت آنی می‌باشد، خطوط منحنی موجودی در زمان‌های دریافت کالا به صورت قائم هستند.

در شرایط زیادی، کل کالای سفارش شده در یک سفاش به صورت آنی به انبار تحویل نشده، بلکه به صورت تدریجی و به مقدار P واحد کالا در واحد زمان به انبار وارد می‌شود. در مواردی که سفارشات کالا مربوط به ساخت (سفارش ساخت کالا) باشند، اغلب، کالای سفارش داده شده به صورت یکجا تحویل انبار نشده و بنا به سرعت و حجم بخش تولیدی، کالا به صورت مستمر و به تدریج وارد انبار می‌شود. فرض کنید که سیستم موجودی، انبار یک کارخانه باشد. محصول به صورت دسته‌ای تولید و مستقیماً به انبار کارخانه می‌رود. وقتی که دستگاه‌ها آماده تولید می‌شوند محصول با نرخ تولید P در سال (مستقل از مقدار هربار تولید) ساخته می‌شود. بدیهی است که سرعت رسیدن کالا به انبار (P) باید بیش از سرعت مصرف کالا (D) باشد[1]، درغیر اینصورت کالایی به انبار تحویل داده نمی‌شود و موجودی انبار به صفر خواهد رسید و ما با کمبود کالا روبرو می‌شویم. منحنی موجودی یک کالا وقتی به صورت تدریجی وارد انبار می‌شود می‌تواند مانند شکل ۲–۵ باشد:



شکل ۲–۵ منحنی موجودی خالص در حالت دریافت تدریجی

با توجه به شکل ۲–۵، اولین قسمت از سفارش ۱ در زمان t_1 به انبار رسیده است ولی دریافت مقادیر مربوط به همین سفارش تا زمان t_2 ادامه داشته است. در این مدت (فاصله بین t_1 تا t_2) مسلماً

---

[1] . به این مفهوم که کالا با سرعت زیاد، ولی در مقاطع کوتاه به انبار وارد شده، و با سرعت کمتر، ولی به طور مستمر از انبار خارج شده و به مصرف می‌رسد. در عین حال، در صورتیکه به جای سفارش خرید، سفارش برای ساخت کالا صادر شود، طبیعی است که این کالا به تدریج تولید شده و می‌تواند به تدریج با سرعت P وارد انبار شود.

مقداری کالا نیز، از انبار خارج شده است. بنابراین سرعت افزایش مقدار موجودی انبار (شیب پاره‌خط AB) برابر اختلاف بین سرعت دریافت کالا توسط انبار (P) و سرعت خروج کالا از انبار یا سرعت مصرف (D) می‌باشد (یعنی ضریب زاویه با شیب پاره‌خط AB برابر P-D است). بدیهی است چنانچه سرعت دریافت کالا با سرعت مصرف (خروج) کالا از انبار برابر باشند (P=D) هرآنچه که کالا دریافت می‌شود به همان مقدار نیز مصرف می‌گردد و موجودی انبار همواره صفر است.

مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی در حالت دریافت تدریجی کالا به نام‌های مدل تولیدی، مدل با نرخ ثابت دریافت سفارش، EPQ و مقدار تولید اقتصادی نیز شناخته می‌شود. در این فصل ابتدا موردی تحت مطالعه قرار می‌گیرد که در آن تمامی تقاضاها باید از موجودی تامین گردند، یعنی هیچ تقاضای عقب افتاده یا فروش‌های از دست رفته مجاز نیست.

۲- ۵ نحوه محاسبه روابط مدل

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که سفارش یکجا دریافت نمی‌شود بلکه با نرخ ثابت P و به تدریج دریافت می‌شود (شکل ۵-۳ را ببینید). هدف مدل تعیین مقدار هر بار تولید اقتصادی (Q^*) و نقطه سفارش مجدد (r^*, r^*_h) با کمینه کردن هزینه‌ها است. پارامترهای مدل نیز همان پارامترهای مدل EOQ است با تغییرات زیر:

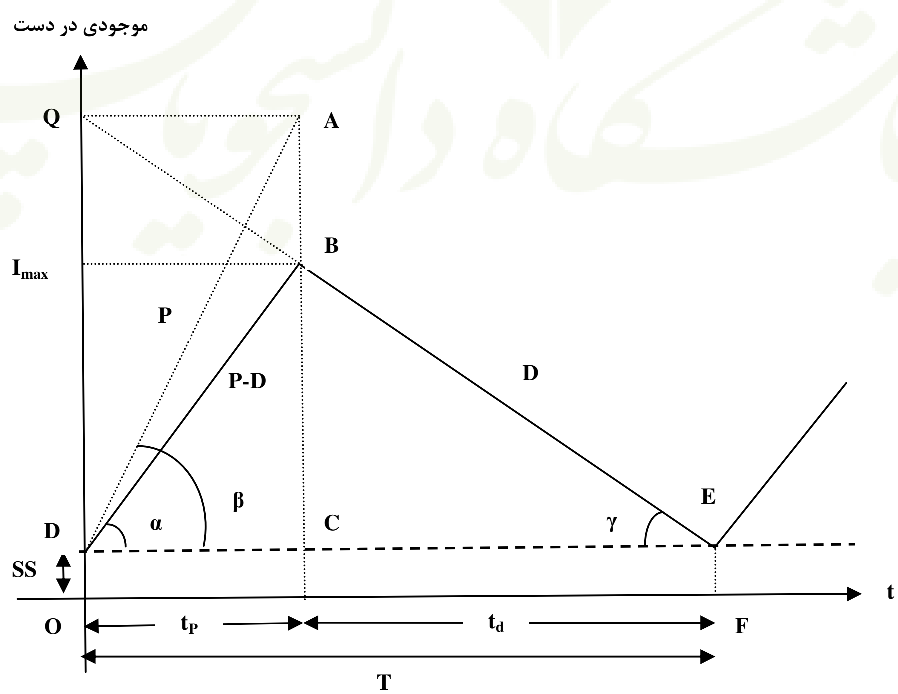
A: هزینه هربار آماده کردن دستگاه (هزینه هربار آماده‌سازی)،

C: هزینه متغیر با قیمت تمام شده هر واحد،

P: نرخ دریافت سفارش یا نرخ تولید،

t_p: مدت زمانی از یک دوره که در حالت تولید و مصرف هستیم.

t_d: مدت زمانی از یک دوره که صرفاً در حالت مصرف هستیم (تولید متوقف شده است).



شکل ۳-۵ نمودار موجودی خالص در حالتی که کالا به صورت تدریجی وارد انبار می‌شود

در صورتیکه فرض شود در مدت زمانی که کالا وارد انبار می‌شود، هیچگونه مصرفی وجود نداشته باشد، آنگاه موجودی انبار با سرعت شیب خطچین P اضافه می‌شود، در اینصورت سطح موجودی به نقطه Q خواهد رسید. در فاصله زمانی t_p به اندازه AC کالا وارد انبار و به اندازه AB کالا از انبار خارج می‌شود، در نتیه سطح موجودی به نقطه B یا I_{max} می‌رسد. باتوجه به شکل ۳-۵ طول یک دور و زمان لازم برای تولید هر دسته برابر است با:

$$T= t_p+ t_d \qquad (5\text{-}1)$$

$$tan\beta = \frac{AC}{CD} = \frac{Q}{t_p} \rightarrow t_p = \frac{Q}{tan\beta} = \frac{Q}{P} \qquad (5\text{-}2)$$

موجودی در انبار کارخانه در انتهای هر بار تولید به حداکثر مقدار خود می‌رسد. این تعداد حداکثر برابر است با:

$$tan\alpha = \frac{BC}{CD} = \frac{I_{max}}{t_p} = P - D \rightarrow I_{max} = (P-D)t_p = Q\left(1-\frac{D}{P}\right) \qquad (5\text{-}3)$$

از طرفی:

$$tan\gamma = \frac{BC}{CE} = \frac{I_{max}}{t_d} \rightarrow I_{max} = tan\gamma t_d = Dt_d \qquad (5\text{-}4)$$

همانگونه که محاسبه شد، ماکزیمم موجودی (I_{max}) در این مدل نسبت بـه EOQ کمتـر اسـت و بنـابراین متوسط موجودی نیز کمتر می‌شود، که از این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که، هزینه نگهداری سالیانه کالا در این مدل کمتر از مدل EOQ است.

زمان لازم برای تخلیه این موجودی انبار عبارت است از:

$$tan\gamma = D = \frac{I_{max}}{t_d} = \frac{Q\left(1-\frac{D}{P}\right)}{t_d} \rightarrow t_d = \frac{Q}{D}(1-\frac{D}{P}) \qquad (5\text{-}5)$$

برای حل مدل باید کل هزینه‌های سالیانه را بدست آورد:

هزینه خرید +هزینه نگهداری +هزینه سفارش‌دهی =کل هزینه‌های یک دوره (5-6)

متوسط موجودی × هزینه نگهداری یک واحد = هزینه نگهداری (5-7)

$$= h(S_{\Delta BCD} + S_{\Delta BCE} + S_{\square ODEF}) = h\left[\left(\frac{CD \times BC}{2}\right) + \left(\frac{BC \times CE}{2}\right) + (OD \times OF)\right]$$

$$h\left[\left(\frac{t_P \times I_{max}}{2}\right) + \left(\frac{I_{max} \times t_d}{2}\right) + (SS \times T)\right] = h\left[\left(\frac{I_{max}(t_P + t_d)}{2}\right) + (SS \times T)\right]$$

$$= h\left[\left(\frac{I_{max}(T)}{2}\right) + (SS \times T)\right] = hT\left[SS + \frac{1}{2}Q\left(1-\frac{D}{P}\right)\right] \qquad (5\text{-}8)$$

کل هزینه‌های یک دوره $= A + hT\left[SS + \frac{1}{2}Q\left(1-\frac{D}{P}\right)\right] + CQ$ (5-9)

تعداد دوره‌ها در سال $= N = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q}$ (5-10)

کل هزینه‌های یک دوره × تعداد دوره‌ها در سال = کل هزینه‌های سالیانه (5-11)

$$\rightarrow Tc = \frac{AD}{Q} + h\left[SS + \frac{1}{2}Q\left(1-\frac{D}{P}\right)\right] + CD \qquad (5\text{-}12)$$

همانطور که می‌بینیم تفاوت مدل تولید اقتصادی در حالت عدم کمبود با EOQ تنها در هزینه‌های نگهداری کالا است. برای بدست آوردن Q^* از Tc نسبت به Q مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial Tc}{\partial Q}=0\rightarrow\ Q^*=EPQ=\sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}}=\sqrt{\frac{2AD}{h}}\sqrt{\frac{P}{P-D}}=Q_w\sqrt{\frac{1}{1-\frac{D}{P}}}\qquad(5\text{-}13)$$

$$Tc(Q^*)=\sqrt{2ADh\left(1-\frac{D}{P}\right)}+hSS\qquad(5\text{-}14)$$

$$I^*_{max}(EPQ)=Q^*\left(1-\frac{D}{P}\right)=\sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}}\left(1-\frac{D}{P}\right)=Q_w\sqrt{\left(1-\frac{D}{P}\right)}\qquad(5\text{-}15)$$

در حالتیکه ذخیره اطمینان برابر صفر باشد می‌توان هزینه سالیانه را بصورت زیر نوشت:

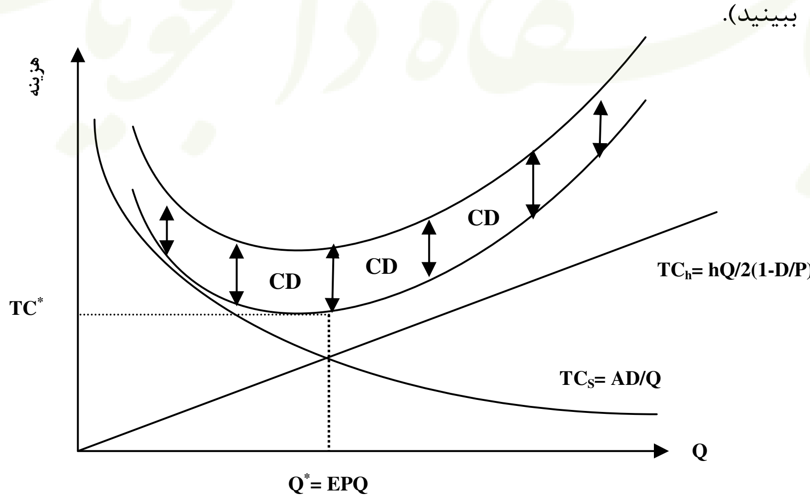
$$Tc(Q^*)=\sqrt{2ADh\left(1-\frac{D}{P}\right)}=Tc_{Q_w}\sqrt{1-\frac{D}{P}}=hI^*_{max}\qquad(5\text{-}16)$$

توجه شود که (1- D/P) یک کسر کوچکتر از واحد است، بنابرین $\frac{1}{1-\frac{D}{P}}$ یک کسر بزرگتر از واحد خواهد بـود، که نتیجه می‌شود:

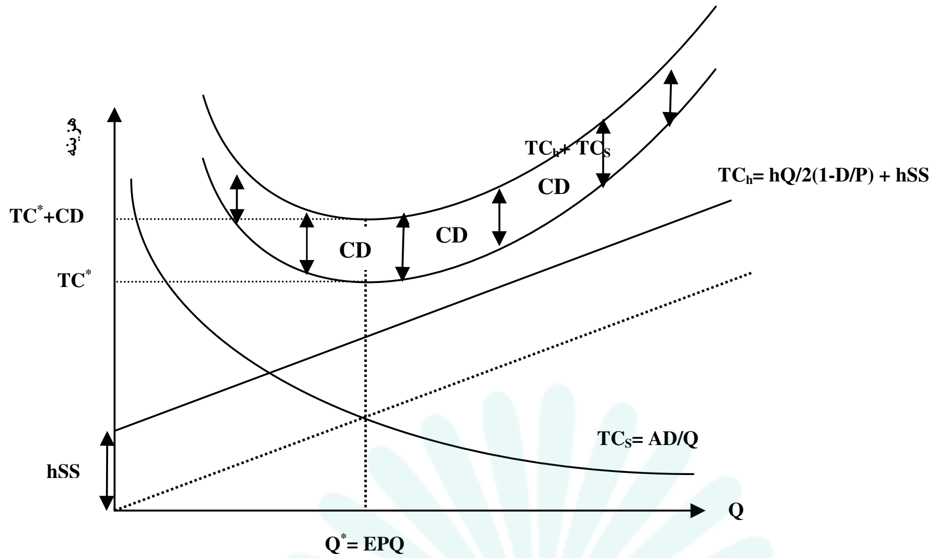
۱. مقدار سفارش اقتصادی در حالت دریافت تدریجی بیشتر از مقدار سفارش اقتصادی EOQ است.
۲. هزینه متغیر سالیانه در حالت EPQ کمتر از هزینه کتغیر در حالت EOQ است.
۳. ماکزیمم موجودی در حالت EPQ از ماکزیمم موجودی در مدل EOQ کمتر است.
۴. دوره تولید اقتصادی بیشتر از دوره سفارش اقتصادی است:

$$T^*=\frac{Q^*}{D}=\frac{Q_w\sqrt{\frac{P}{P-D}}}{D}=T_w\sqrt{\frac{P}{P-D}}\qquad(5\text{-}17)$$

۵. در صورتیکه هزینه‌های مربوط به نگهداری ذخیره اطمینان (hSS) را در کل هزینه نگهداری منظور ننمائیم، در نقطه اقتصادی سفارش، همواره مقادیر کل هزینه سفارش‌دهی و کل هزینه نگهداری با یکدیگر برابر می‌شوند. به عبارت دیگر، در نقطه مینیمم تابع هزینه کل در محل تلاقی TC_S و TC_h قرار می‌گیرد. در صورت وجود ذخیره اطمینان، خط TC_h با همان شیب h، ولی به مقدار hSS بالاتر می‌رود. در این حالت، نقطه مینیمم هزینه کل، در محل تلاقی TC_S با خط فرضی که به موازات TC_h از نقطه مبداء مختصات می‌گذرد قرار خواهد گرفت (شکل ۴-۵ را ببینید).



الف- بدون در نظر گرفتن ذخیره اطمینان



ب- با در نظر گرفتن ذخیره اطمینان

شکل ۴-۵ هزینه‌های موجودی‌ها در مقابل مقدار هر بار سفارش

۶. اگر

Q > EPQ باشد، هزینه نگهداری بیشتر از هزینه نگهداری است.

Q = EPQ باشد، هزینه نگهداری با هزینه سفارش‌دهی برابر است.

Q < EPQ باشد، هزینه نگهداری از هزینه سفارش‌دهی کمتر است.

۷. شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه برای هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی به ترتیب برابر $\frac{h}{2}(1-\frac{D}{P})$ و $-\frac{h}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)$ است.

۸. در صورتیکه به جای مقدار Q^* مقدار نابهینه Q سفارش دهیم، درصد افزایش هزینه متغیر از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{Tc}{Tc(EPQ)} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{EPQ} + \frac{EPQ}{Q}\right) \qquad (5\text{-}18)$$

۹. مقایسه بین مدل EOQ و EPQ و EOQ در حالت کمبود پس‌افت (حالت خاص):

	مدل EOQ در حالت کمبود پس‌افت		مدل EOQ		مدل EPQ
مقدار سفارش بهینه	$Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$	<	Q_w	>	$\frac{Q_w}{\sqrt{1-\frac{D}{P}}}$
حداکثر موجودی بهینه (I_{max})	$Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$	>	Q_w	<	$Q_w\sqrt{1-\frac{D}{P}}$
متوسط موجودی بهینه ($\bar{I}$)	$\frac{(Q^*-b^*)}{2Q^*}$	>	$\frac{Q_w}{2}$	<	$\frac{Q_w}{2}\sqrt{1-\frac{D}{P}}$
هزینه نگهداری سالیانه	$h\bar{I}$	>	$h\bar{I}$	<	$h\bar{I}$
کل هزینه متغیر سالیانه ($Tc(Q^*)$)	$\sqrt{2ADh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$	>	$\sqrt{2ADh}$	<	$\sqrt{2ADh(1-\frac{D}{P})}$

۱۰. با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینه بهینه سالیانه به صورت زیر تغییر می‌کند:

	$Q^*= EPQ$	$Tc\ (Q^*= EPQ)$
افزایش A	افزایش	افزایش
افزایش D	افزایش	تغییرات مشخص نیست
افزایش h	کاهش	افزایش
افزایش i	کاهش	افزایش
افزایش c	کاهش	افزایش
افزایش p	تغییر نمی‌کند	افزایش
افزایش LT	تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند

۱۱. نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ مشابه نمودار موقعیت موجودی مدل EOQ است و محدوده تغییرات آن به صورت $DL \le y(t) \le DL+ Q$ است.

مثال ۱- یک شرکت فرآورده‌های شیمیایی سالیانه به ۱۲۰۰۰ بشکه از یک نوع ماده اولیه نیاز دارد. هزینه نگهداری این ماده اولیه در داخل کارخانه در هر سال ۲۰ درصد متوسط موجودی کالا در انبار می‌باشد. هزینه ثابت هر بار سفارش این ماده ۹۰۰۰۰۰ واحد پولی و قیمت هر بشکه این کالا ۴۰۰۰۰۰ واحد پولی است. حمل کالا به داخل کارخانه توسط کامیون‌های خاص انجام می‌شود و این کامیون‌ها هر بار که این کالا سفارش داده می‌شود، آن را با سرعت تقریباً ۸۰ بشکه در روز به کارخانه می‌رسانند. مطلوبست:

الف- شرکت فرآورده‌های شیمیایی هر بار باید چه تعداد بشکه سفارش دهد تا کل هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری این کالا به حداقل برسد؟

ب- محاسبه فوصل زمانی بین دو سفارش.

ج- محاسبه هزینه‌های سالیانه نگهداری و سفارش‌دهی در شرایط بهینه.

یک سال را برابر ۳۶۵ روز و ذخیره اطمینان را برابر صفر در نظر بگیرید.

پاسخ:

$$D = 12000 \frac{\text{بشکه}}{\text{سال}}\,,\quad i = 0.20 \frac{\text{ریال}}{\text{سال}} \rightarrow h = i \times c = 0.2 \times 400000 = 80000$$

$$C = 400000\,,\quad A = 900000\,, P = 80 \frac{\text{بشکه}}{\text{روز}} = 80 \times 365 = 29200 \frac{\text{بشکه}}{\text{سال}}$$

الف-

$$EPQ = \sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \times 900000 \times 12000}{80000\left(1-\frac{12000}{29200}\right)}} = 677.0318$$

ب-

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{677}{12000} = 0.0564\ \text{سال} = 0.0564 \times 365 = 20.59\ \text{روز}$$

تقریباً هر ۲۰ روز یکبار این کالا سفارش می‌شود.

ج-

$$Tc_h = \frac{hQ^*}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right) = \frac{1}{2}\times 80000 \times 677.0318 \times \left(1-\frac{12000}{29200}\right) = 15951982.14$$ واحد پولی

$$Tc_s = \frac{AD}{Q^*} = 900000 \times \frac{12000}{677.0318} = 15951983.35$$ واحد پولی

مثال ۲- مدیر یک سیستم موجودی اغلب با این تصمیم روبرو است که آیا قطعه مورد لزوم را بخـرد یـا در کارخانه تولید کند. فرض کنید که اگر قطعه از خارج خریداری شود، هر واحد ۲۵ تومان تمـام مـی‌شـود در حالیکه اگر در کارخانه تولید شود، هر واحد ۲۵ تومان خواهد بود. به هر حـال اگـر قطعـه خریـداری شـود، هزینه هر بار سفارش ۵ تومان است، در حالیکه اگر قطعه در کارخانه تولید شود، هزینـه هـر بـار راه‌انـدازی ماشین‌آلات ۵۰ تومان است. ماشین‌آلات تنها می‌توانند در سال ۱۰۰۰۰ قطعه تولید نمایند. تقاضای سالیانه این قطعه ۲۵۰۰ واحد بوده و نرخ نگهداری قطعه برابر ۱۰ درصد است. با توجه به اطلاعـات داده شـده بـه سوالات زیر پاسخ دهید:

الف- متوسط هزینه سالیانه بهینه برای سیاست خرید را بدست آورید.

ب- متوسط هزینه سالیانه بهینه برای سیاست تولید را محاسبه کنید.

ج- اندازه انباشته بهینه برای سیاست خرید چقدر است.

د- اندازه انباشته بهینه برای سیاست تولید چقدر است.

پاسخ:

الف-

مدل خرید: $C = 25\,,\quad A = 5\,,\quad D = 2500\,,\quad i = 0.1 \rightarrow h = i \times c = 0.1 \times 25 = 2.5$

کل هزینه بهینه سالیانه $= \sqrt{2ADh} + CD = \sqrt{2 \times 2500 \times 5 \times 2.5} + 25 \times 2500 = 62750$

ب-

مدل تولید: $C = 22\,,\quad A = 50\,,\quad P = 10000\,,\quad i = 0.1 \rightarrow h = i \times c = 0.1 \times 22 = 2.2$

کل هزینه بهینه سالیانه $= \sqrt{2ADh(1-\frac{D}{P})} + CD$

$$= \sqrt{2 \times 2500 \times 50 \times 2.2(1-\frac{2500}{10000})} + 22 \times 2500 = 55642$$

ج-

$$EOQ = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 2500 \times 5}{2.5}} = 100$$

د-

$$EPQ = \sqrt{\frac{2AD}{h(1-\frac{D}{p})}} = \sqrt{\frac{2 \times 2500 \times 5}{2.2(1-\frac{2500}{10000})}} \cong 389$$

مثال ۳- در یک سیستم سفارشات، دریافت به صورت آنی (لحظه‌ای) بوده و در این شرایط مقدار اقتصادی سفارش (EOQ) برابر ۸۰۰ است. اخیراً دریافت حالت تدریجی دارد. در شرایط جدید سایر پارامترهـا ماننـد قبل است، مقدار اقتصادی سفارش به ۱۶۰۰ رسیده است. در شرایط جدید سرعت مصرف به سرعت دریافت کالا برابر را بدست آورید.

پاسخ:

$$EOQ = 800\,, \quad EPQ = 1600$$

$$EPQ = \frac{EOQ}{\sqrt{1-\frac{D}{P}}} \rightarrow \sqrt{1-\frac{D}{P}} = \frac{800}{1600} = \frac{1}{2} \rightarrow 1-\frac{D}{P} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{D}{P} = \frac{3}{4}$$

۵-۳ محاسبه نقطه سفارش مجدد

نقطه سفارش مجدد برحسب موجودی در دست در مدل EPQ بـا توجـه بـه اینکـه لحظـه صـدور سفارش در قسمت صعودی یا نزولی نمودار بیافتد دو حالت مختلـف دارد و ایـن دو حالـت از مقایســه بـین $\acute{L} = L - mT$ و t_d (مدت زمانی که فقط در حال مصرف هستیم) به دست می‌آید. توضیح این نکته ضروری است که، زمان تدارک مورد نیاز (L)، فاصله زمانی از لحظه‌ای که انبار دستور سفارشی را به کارخانه می‌دهد تا وقتی که اولین واحد از خط تولید خارج گردد، تعریف می‌شود. آنگاه نقطه سفارش مجدد (r_h) بـر مبنـای سطح موجودی در دست، با فرض اینکه m بزرگترین عدد صحیح کوچکتر مساوی با L/T باشد، بـه صـورت زیر تعریف می‌شوند:

$$r^* = DL \qquad (5\text{-}19)$$

$$\begin{cases} r_h^* = D\acute{L} = D(L-mT) = DL - mQ^* & \text{اگر } \acute{L} = L - mT < t_d \\ r_h^* = (P-D)(T-\acute{L}) = DL - PL + (m+1)(\frac{P}{D}-1)Q^* & \text{اگر } \acute{L} = L - mT \geq t_d \end{cases} \qquad (5\text{-}20)$$

۵-۴ مدل EPQ هنگامیکه کمبود مجاز و قابل جبران باشد

فرضیات مدل مانند مدل EPQ است با این تفاوت که کمبود به صورت سفارشات عقب‌افتاده مجاز می‌باشد. هدف مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی بهینه (Q^*) و مقدار کمبود بهینـه (b^*) و همینطـور r^* و r^*_h با کمینه کردن هزینه‌ها است. پارامترهای هزینه کمبود $(\pi, \hat{\pi})$ و نرخ تولید (P) مقدار ثابتی را دارا می-باشند.

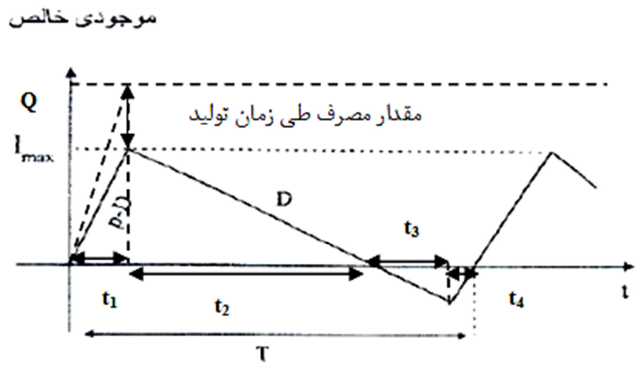
با توجه به شکل ۵-۵ می‌توان تعاریف و روبط زیر را نوشت:

t_1: مدت زمانی که تولید انجام می‌شود و موجودی روبه افزایش است.

t_2: مدت زمانی که فقط مصرف می‌کنیم و تولیدی وجود ندارد ولی موجودی مثبت است.

t_3: مدت زمانی که تولیدی وجود ندارد و موجودی نیز نداریم و کمبود بوجود می‌آید.

t_4: مدت زمانی که تولید انجام می‌شود و موجودی صفر است (برای رفع کمبود بکار می‌رود).



شکل ۵-۵ نمودار موجودی خالص در مدل EPQ در حالتیکه کمبود کالا مجاز و قابل جبران باشد

$$t_1 = \frac{I_{max}}{P-D} \quad (5\text{-}21)$$
$$t_2 = \frac{I_{max}}{D} \quad (5\text{-}22)$$
$$t_3 = \frac{b}{D} \quad (5\text{-}23)$$
$$t_4 = \frac{b}{P-D} \quad (5\text{-}24)$$

مدت زمان هر دوره یا سیکل $= T = t_p(t_1 + t_4) + t_d(t_2 + t_3) = \frac{Q}{D}$ (5-25)

مقدار مصرف طی زمان تولید $= t_pD = \frac{Q}{P}D$ (5-26)

حداکثر موجودی $= I_{max} = Q(1-\frac{D}{P}) - b$ (5-27)

متوسط موجودی $= \bar{I} = \frac{1}{2}\mathrm{I_{max}}(\mathrm{t_1} + \mathrm{t_2}) \times \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{\left[\mathrm{Q}\left(1-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{P}}\right)-\mathrm{b}\right]^2}{2\mathrm{Q}\left(1-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{P}}\right)}$ (5-28)

متوسط کمبود $= \frac{1}{2}b(t_3 + t_4) \times \frac{1}{T} = \frac{b^2}{2Q(1-\frac{D}{P})}$ (5-29)

$$Tc(Q,b) = \frac{AD}{Q} + h\bar{I} + \hat{\pi}\bar{b} + \pi b\frac{D}{Q} + CD \quad (5\text{-}30)$$

برای بدست آوردن Q^* و b^* باید از تابع هزینه متغیر $Tc(Q, b)$ نسبت به Q و b مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم و معادلات مربوطه را حل کنیم:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta Tc(Q,b)}{\delta b} &= 0,\\ \frac{\delta Tc(Q,b)}{\delta Q} &= 0\end{aligned}\right\} \overset{\hat{\pi}\neq 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} Q^* = \sqrt{\dfrac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)} - \dfrac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}}\sqrt{\dfrac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} & (5-31)\\ b^* = \dfrac{hQ^* - \pi D\left(1-\frac{D}{P}\right)}{\hat{\pi}+h} & (5-32)\end{cases}$$

الگوریتم حل:

اگر $\pi D \geq \sqrt{2ADh(1-\frac{D}{P})}$ باشد، به مدل EPQ برمی‌گردیم:

$$Q^* = EPQ, \qquad Tc(Q^*) = \sqrt{2ADh\left(1-\frac{D}{P}\right)}, \qquad b^* = 0$$

اگر $\pi D < \sqrt{2ADh(1-\frac{D}{P})}$ دو حالت می‌تواند رخ دهد:

- اگر $\hat{\pi} = 0$ باشد، سیستم موجودی وجود ندارد.
- اگر $\hat{\pi} > 0$ باشد، مقدار بهینه از مدل EPQ کمبود بدست می‌آید.

مانند مدل EOQ با کمبود پس‌افت، مدل EPQ با کمبود پس‌افت نیز حالت خاصی دارد که از این حالت برای مقایسه حل مسایل این مدل استفاده می‌گردد. در این حالت، $\pi = 0, \hat{\pi} > 0$ است. روابط بهینه این حالت به صورت زیر است:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \tag{5-33}$$

$$b^* = \sqrt{\frac{2AD}{\hat{\pi}}}\sqrt{\frac{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}{\hat{\pi}+h}} = \frac{hI_{max}}{\hat{\pi}+h} = \frac{hQ^*}{\hat{\pi}+h}\left(1-\frac{D}{P}\right) \tag{5-34}$$

$$I^*_{max} = \sqrt{\frac{2AD}{h}}\sqrt{\left(1-\frac{D}{P}\right)}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} \tag{5-35}$$

$$Tc^* = \sqrt{2ADh\left(1-\frac{D}{P}\right)}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} \tag{5-36}$$

برای نقطه سفارش مجدد برحسب موجودی در دست در این مدل مانند مدل EPQ دو حالت وجود داد:

$$r^* = DL - b^* \tag{5-37}$$

$$r_h^* = D\acute{L} - b^* = DL - mQ^* - b^* \qquad \acute{L} = L - mT < t_d \tag{5-38}$$

$$r_h^* = (P-D)(T-\acute{L}) - b^* \qquad \acute{L} = L - mT \geq t_d \tag{5-39}$$

$$= DL - PL + (m+1)\left(\frac{P}{D}-1\right)Q^* - b^*$$

مثال ۴- تقاضای کالایی ۲۴۰۰۰ واحد در سال است و می‌توان این کالا را با نـرخ ۴۸۰۰۰ واحـد در سـال تولید کرد. کسری به صورت تقاضای عقب افتاده مجاز است و مقدار بهینه هربار سفارش‌دهـی و کسـری در هر دوره سفارش به ترتیب ۱۲۰۰ و ۴۲۰ واحد محاسبه شده است. اگر مدت زمان تحویـل یـک مـاه باشـد، نقطه سفارش مجدد چقدر است؟

پاسخ:

$$D = 24000, \quad P = 48000, \quad Q^*_{\text{کمبود}} = 1200, \quad b^* = 420,$$

$$L = \frac{1}{12}, \quad T = \frac{Q^*_{\text{کمبود}}}{D} = \frac{1200}{24000} = \frac{1}{20} \rightarrow m = \left[\frac{L}{T}\right] = \left[\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{20}}\right] = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \acute{L} &= L - mT = \frac{1}{12} - 1\times\frac{1}{20} = \frac{1}{30} \\ t_d &= T\left(1-\frac{D}{P}\right) = \frac{1}{20\left(1-\frac{24000}{48000}\right)} = \frac{1}{40} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \acute{L} > t_d$$

$$r_h^* = (P-D)(T-\acute{L}) - b^* = (48000-24000)\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{30}\right) - 420 = 400 - 420 = -20$$

۵-۵ تمرین

۱. موقعیت موجودی (برحسب مجموع موجودی در دست و در راه) در یک مدل کنترل موجودی قطعی در مقایسه با مدل دریافت تدریجی به چه صورتی است ((y(t) موقعیت موجودی در لحظهt)؟

D: نرخ تقاضا

L: مدت زمان تدارک

Q: مقدار اندازه انباشته

P: نرخ تولید (دریافت موجودی)

۱) $DL \leq y(t) \leq DL + Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)$

۲) $DL + Q\left(1 - \frac{D}{P}\right) \leq g(t) \leq DL + Q(1 - \frac{D}{P})$

۳) $DL + Q\left(1 - \frac{D}{P}\right) \leq y(t) \leq DL + Q$

۴) مانند موقعیت موجودی در مدل ساده قطعی است.

۲. در یک واحد صنعتی که براساس مقدار تولید اقتصادی عمل می‌کند. اگر R تقاضای سالیانه و نرخ تولید سالیانه برابر p باشد و شرایطی پیش آید که نرخ تقاضا افزایش یابد ولی همواره کمتر از نرخ تولید باشد، به شرطی که سایر عوامل تغییر نکند چه تغییری در روند تولید و یا موجودی صورت خواهد پذیرفت؟

۱) سیکل زمانی کل کاهش می‌یابد.

۲) سیکل زمانی کل افزایش می‌یابد.

۳) تعداد دفعات تولید در سال کاهش می‌یابد.

۴) سطح حداکثر موجودی افزایش می‌یابد و تغییری در سیکل زمانی پیدا نمی‌شود.

۳. یک تولیدکننده محصولی را جهت موجودی به صورت انباشته تولید می‌نماید. نرخ تقاضای سالیانه به مقدار ۱۰۰۰۰۰ واحد ثابت بوده و نرخ تولید سالیانه ۲۵۰۰۰۰ واحد است. هزینه راه‌اندازی ماشین‌آلات ۲۰۰۰ تومان، هزینه متغییر تولید برای هر واحد محصول ۱۰ تومان و نرخ هزینه نگهداری موجودی ۰/۱۵ است. هیچ‌گونه کمبود موجودی مجاز نمی‌باشد. اگر ماکزیمم ظرفیت ذخیره موجودی برای این محصول ۱۳۰۰۰ واحد باشد، اندازه انباشته تولید بهینه چند واحد خواهد بود؟

۴. در یک مدل موجودی قطعی که ورود کالا به سیستم تدریجی با نرخ ۲۰۰۰ واحد در سال و نرخ تقاضای سالیانه ۱۰۰۰ واحد کالا است، زمان آماده‌سازی برای تولید ۳ ماه است. اگر در چنین سیستمی هر بار ۲۰۰ واحد کالا سفارش داده شود، نقطه سفارش چقدر است؟

۵. شرایط فعلی یک سیستم سفارشات: مواجهه با کسری مجاز است، نسبت پارامترهای "واحد هزینه نگهداری" به "واحد هزینه مواجهه با کسری" برابر ۳ است، در یافت به صورت آنی، مقدار اقتصادی سفارش، ۴۰۰۰ واحد. شرایط پیشنهادی: مواجهه با کسری مجاز نیست، نسبت سرعت

مصرف به سرعت دریافت، ۰/۸۴ است. سایر شرایط مانند قبل است. در شرایط پیشنهادی مقدار اقتصادی سفارش را بدست آورید؟

۶. یک کارگاه تولیدی سفارش محصول خاصی را به میزان ۳۰۰۰ واحد در سال دریافت کرده است. ظرفیت تولیدی کارگاه برای ساخت این سفارش ۵۰۰۰ واحد در سال است. هزینه متغیر هر واحد محصول ۶ تومان و هزینه راه‌اندازی ماشین‌آلات ۲۰ تومان است. هزینه سفارشات عقب‌افتاده برای هر واحد محصول در سال ۲ تومان و هزینه سفارشات عقب‌افتاده برای هر واحد محصول مستقل از مدت زمان ۰/۱۸ تومان است. نرخ هزینه نگهداری موجودی ۲۰ درصد است. باتوجه به اطلاعات فوق مقدار انباشته بهینه و مقدار سفارش عقب‌افتاده را بدست آورید.