فصل دهم

مدل‌های احتمالی

۱-۱۰ مقدمه

در مدل‌های موجودی بررسی شده در فصول قبل مقادیر هزینه‌ها و بخصوص نرخ تقاضا در مدت زمان تحویل ثابت درنظر گرفته می‌شد. این مدل‌ها جزء مدل‌های موسوم به مدل‌های قطعی محسوب می‌شوند. این مدل‌ها موقعیتی ایده‌آل را نشان می‌دهند، حال آنکه در عمل عموماً نرخ تقاضا، D، و مدت زمان تحویل، L، نه تنها ثابت و معلوم نیستند، بلکه دارای تغییرات تصادفی هستند. این تغییرات تصادفی یکی از مشکل‌ترین مسائل واقعی مدیریت موجودی‌ها است. برای توضیح ابتدایی فرض کنید که مدت تحویل معلوم و فقط تقاضا متغیری تصادفی است. تغییرات تصادفی تقاضا بر خلاف تغییرات معلوم تقاضا مثل روند یا فصلی بودن آن که قابل شناسایی هستند، غیر قابل پیش‌بینی هستند. بنابراین آشنایی با مدل‌های احتمالی در برنامه‌ریزی تولید و کنترل موجوی‌ها امری ضروری به نظر می‌رسد. در این فصل ابتدا به بررسی مدل‌های احتمالی یک دوره‌ای پرداخته می‌شود و سپس انواع خط‌مشی‌های سیستم موجودی تشریح می‌گردد.

۲-۱۰ مدل احتمالی یک دوره‌ای

در این بخش یک مدل موجودی بررسی می‌شود که در آن تقاضا متغیری تصادفی بوده و تابع توزیع احتمالی آن معلوم است. صفت مشخصه چنین مدلی این است که در آن تنها یک دوره زمانی درنظر گرفته شده و فرصت تهیه محصول فقط یکبار و آن هم در ابتدای دوره است. این مدل موجودی به "مساله روزنامه فروش (Newsboy Problem)" و "مساله درخت کریسمس" معروف است. این مدل در بسیاری از مسائل موجودی در جهان واقعی، مانند فروش روزنامه، کارت تبریک عید، قطعات یدکی که فقط یکبار تهیه و یا تولید می‌شوند و محصولات فاسد شدنی کاربرد عملی دارند.

فرضیات مدل:

۱- تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲- سفارش صرفاً یکبار در ابتدای دوره به موجودی اضافه می‌گردد.

۳- برنامه‌ریزی صرفاً برای یک دوره انجام می‌پذیرد و موجودی باقیمانده در انتهای دوره حراج شده یا از بین می‌رود.

۴- کمبود جایز است.

www.pnu-club.com

۵- هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهای باقی‌مانده در انتهای دوره (که حراج می‌شوند یا از بـین مـی-روند) محاسبه می‌گردد.

۶- در ابتدای دوره موجودی برابر با I به عنوان موجودی ابتدای دوره وجود دارد.

پارامترهای مدل:

D: متغیر تصادفی تقاضا در یک دوره

$f_D(x)$: تابع چگالی تقاضا در مدت زمان یک دوره

$F_D(x)$: تابع توزیع تجمعی تقاضا در مدت زمان یک دوره

C: قیمت خرید هر واحد

V: قیمت فروش هر واحد

π: هزینه کمبود هر واحد

L: قیمت حراج هر واحد

A: هزینه هر بار سفارش

h: هزینه نگهداری هر واحد در مدت زمان یک دوره

H: ترکیب هزینه‌های هر واحد باقیمانده در انتهای دوره

H= h+هزینه انتقال جهت حراج یا فروش برحسب هر واحد - L

I: موجودی ابتدای دوره (یک لحظه قبل از سفارش)

Z(R): سود حاصل ا فروش در یک دوره

P(R): درامد حاصل از فروش در یک دوره

Q(R): مجموع هزینه‌ها در یک دوره

بنابراین، برای حل مدل تابع سود در یک دوره کـه از درآمـد حاصـل از فـروش یـک دوره منهـای مجمـوع هزینه‌ها در یک دوره حاصل می‌شود را تشکیل می‌دهیم:

$$Z(R) = P(R) - Q(R)$$
$$E(Z) = E(P) - E(Q)$$

$$E(P) = E\left[V\int_0^R xf(x)dx + V\int_R^\infty Rf(x)dx\right] = VE(D) + V\int_R^\infty (R-x)f(x)dx$$

$$E(Q) = E\left[C(R-I) + H\int_0^R (R-x)f(x)dx + \pi\int_R^\infty (x-R)\,f(x)dx\right]$$
$$= C(R-I) + HR - HE(D) + (\pi + H)\int_R^\infty (x-R)f(x)d\,x$$

$$E(Z) = VE(D) + HE(D) - C(R-I) - HR + (V + H + \pi)\int_R^\infty (R-x)f(x)dx$$

$$K(R) = \ C(R-I) + HR - (V + H + \pi)\int_R^\infty (R-x)f(x)dx$$

برای حل معادله از K(R) نسبت به R مستق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

www.pnu-club.com

$$\frac{\partial K(R)}{\partial R} = 0 \rightarrow C + H - (H + \pi + V)[1 - F(R)] = 0 \rightarrow 1 - F(R) = \frac{C + H}{V + \pi + H}$$
$$\rightarrow F(R) = \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

در صورتیکه مقدار $\pi=0$ باشد، آنوقت، $F(R) = \frac{V-C}{V+H}$ این رابطه هنگامی جواب دارد که $V \geq C$ است. واضح است اگر $V < C$ باشد، ازنظر اقتصادی سیستم موجودی نبایستی وجود داشته باشد.

متغیرهای مدل:

R^*: موجودی بهینه ابتدای دوره (یک لحظه بعد از سفارش)

Q^*: مقدار سفارش بهینه

$Q^* = R^* - I$

همانطور که در فرضیات مدل ذکر شد موجودی به دوره‌ی بعد منتقل نمی‌گردد و در آخر دوره باید تصمیم بگیریم که آن را از بین ببریم یا با قیمتی کمتر از C آن را بفروشیم.

مدل‌های احتمالی تک دوه‌ای می‌توانند با تقاضای پیوسته و یا گسسته باشند و همینطور هزینه هر بار سفارش‌دهی (A) ممکن است صفر باشد. بنابراین مدل‌های احتمالی تک‌دوره‌ای به ۴ نوع تقسیم می‌گردند:

۱- تقاضا پیوسته و $A=0$
۲- تقاضا پیوسته و $A\neq0$
۳- تقاضا گسسته و $A=0$
۴- تقاضا گسسته و $A\neq0$

در اینجا مدل‌هایی که در آن $A=0$ است را بررسی خواهیم کرد، روش حل مدل‌های که $A\neq0$ است به صورت سعی و خطا است.

الگوریتم حل مدل در حالتی که تقاضا پیوسته و $A=0$ باشد بصورت زیر است:

مقدار R را از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$F_D(R^*) = \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

بدین معنی که به دنبال نقطه‌ای هستیم که تابع توزیع تجمعی در آن نقطه برابر $\frac{V+\pi-C}{V+\pi+H}$ شود، آن نقطه برابر R^* می‌باشد. حال چنانچه:

- $R^* \leq I$ باشد، نیازی به سفارش نمی‌باشد.
- $R^* > I$ باشد، باید به میزان $Q^* = R^* - I$ سفارش دهیم.

در حالت گسسته ممکن است تابع توزیع تجمعی در هیچ نقطه‌ای دقیقاً برابر $\frac{V+\pi-C}{V+\pi+H}$ نشود، بنابراین برای حالاتی که تقاضا گسسته و $A=0$ است بصورت زیر عمل می‌کنیم:

در حالت گسسته، کوچکترین مقداری از تقاضا در مدت زمان یک دوره که تابع توزیع تجمعی تقاضا را مساوی و یا بزرگتر می‌کند به عنوان R^* انتخاب می‌کنیم، یعنی کوچکترین مقداری که به ازای آن:

$$F_D(R^*) \geq \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

اگر:

- $R^* \leq I$ باشد، نیازی به سفارش نمی‌باشد.
- $R^* > I$ باشد، باید به میزان $Q^* = R^* - I$ سفارش دهیم.

www.pnu-club.com

متوسط هزینه نگهداری، متوسط هزینه کمبود، متوسط موجودی باقیمانده و متوسط مقدار کمبود از روابط زیر بدست می‌آید:

تقاضا پیوسته $$\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \int_0^R (R-x) f_D(x) dx$$

تقاضا گسسته $$\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \sum_{x=0}^{R} (R-x)\, p\{D=x\}$$

(متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره)h=متوسط هزینه نگهداری برای واحدهای باقیمانده در انتهای دوره

تقاضا پیوسته $$\text{متوسط تعداد کمبود در یک دوره} = \int_R^{\infty} (x-R) f_D(x) dx$$ C VSD

گسسته $$\text{متوسط تعداد کمبود در یک دوره} = \sum_{x=R}^{\infty} (x-R)\, p\{D=x\}$$

(متوسط تعداد در یک دوره)π =متوسط هزینه کمبود در یک دوره

مثال ۱- کارگاهی قرار است محصولی را که در ایام عید به فروش می‌رسد، تولید کند. تابع توزیع تصادفی تقاضا برای این محصول بصورت زیر است.

x	≤ 5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P{D=x}	0	0.05	0.05	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.05	0.05

اگر هزینه تولید هر واحد برابر با ۳۰۰۰ تومان، قیمت فروش هر واحد برابر با ۵۰۰۰ تومان و قیمت حراج هر واحد باقی‌مانده در انتهای دوره برابر با ۲۰۰۰ تومان باشد. مطلوبست:

الف- میزان تولید بهینه برای این محصول.

ب- متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره.

ج- متوسط تعداد کمبود در یک دوره.

حل:

C=3000 تومان/ عدد , V=5000 تومان/ عدد, L=2000 تومان/ عدد

A=0, I=0, h=0, π=0

H= (h+ 0- L)= 0 - 2000= -2000

ابتدا باید تابع توزیع تجمعی را بدست آوریم:

x	≤ 5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$P_D(x)$	0	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	1

$$\frac{V+\pi-C}{V+\pi+H} = \frac{5000+0-3000}{5000+0+(-2000)} = 0.66 \quad \rightarrow R^* = 11 \quad \rightarrow Q^* = R^* - I = 11 - 0 = 11$$

بنابراین به اندازه ۱۱ واحد سفارش می‌دهیم.

$$\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \sum_{x=0}^{11} (11-x)\, p\{D=x\}$$
$$= (11-6)\times 0.05 + (11-7)\times 0.05 + (11-8)\times 0.1 + (11-9) \times 0.2 + (11-10)\times 0.2 + (11-11)\times 0.2 = 1.35$$

www.pnu-club.com

$$\text{متوسط تعداد کمبود در یک دوره} = \sum_{x=11}^{14} (x-11)\, p\{D=x\}$$
$$= (14-11)\times 0.05 + (13-11)\times 0.05 + (12-11)\times 0.1 + (11-11)\times 0.2 = 0.35$$

مثال ۲- در یک مدل کنترل موجودی احتمالی یک دوره‌ای، هزینه واحد کسری ۲۰ واحد پول است. اگر توزیع تقاضا یکنواخت در فاصله [10 0] باشد، هزینه کسری مورد انتظار وقتی که در ابتدای دوره ۲ واحد کالا وجود داشته باشد و چهار واحد نیز تهیه شود چقدر است؟

حل:

I= 2, Q= 4, π= 20, D ~ U[0 10] → $f(x) = \frac{1}{10}$

R= Q + I= 6

$$\text{متوسط کمبود در یک دوره} = \int_6^{10} (x-6)\frac{1}{10}dx = 0.8$$

$$\text{هزینه کسری مورد انتظار} = \pi\left(\text{متوسط کسری در یک دوره}\right) = 20(0.8) = 16$$

مثال ۳- تقاضا برای شربتی در طول هفته متغیری تصادفی بوده و تابع توزیع چگالی آن نمایی با میانگین ۱۰۰ لیتر است. این شربت بصورت دسته‌ای فقط یکبار تولید می‌شود. درصورتیکه تمام محصول در طی هفته به فروش نرود، مقدار باقیمانده ضایع شده و قابل مصرف نیست. هزینه تولید هر لیتر ۱۰۰ ریال و قیمت فروش هر لیتر ۲۰۰ ریال است. هر لیتر باقیمانده در انتهای هفته مخارجی برابر ۱۰ ریال برای انتقال از انبار و دور ریختن دارد. کمبود هر لیتر باعث از دست رفتن تقاضا میشود. سطح موجودی پس از سفارش (R) را بدست آورید؟

حل:

چون تابع توزیع تقاضا نمایی و پیوسته است، بنابراین:

$$f(D) = 0.01e^{-0.01D}, \qquad F(D) = 1 - e^{-0.01D}$$

$$F(R^*) = 1 - 1e^{-0.01R^*} = \frac{200+100}{200+10} = \frac{10}{21} \rightarrow R^* = 64.6 \text{ لیتر}$$

۳-۱۰ ذخیره ایمنی (موجودی اطمینان) Safety Stock

ذخیره ایمنی (SS) برای جبران تغییرات تقاضای واقعی از تقاضای پیش‌بینی، تولید واقعی از تولید برنامه‌ریزی شده و زمان‌های تدارک واقعی از مقادیر مورد انتظار می‌باشد، که در ابتدای دوره درنظر گرفته می‌شود و انتظار این است که در طول دوره‌ها از این موجوی اطمینان استفاده شده اما در زمان‌های بعدی به اندازه میزان استفاده شده به آن برگردد. و در یک مدت طولانی متوسط مقدار موجودی اطمینان باید برابر با ابتدای دوره باشد. بنابراین، موجودی اطمینان عبارت است از مقداری موجودی که همیشه در انبار جهت مقابله با کمبود احتمالی نگهداشته می‌شود بطوریکه حتی‌الامکان با کمبود مواجه نشویم و به این دلیل نگاهداشته می‌شود که میزان تقاضا در فاصله زمانی تحویل غیرقطعی است.

از جمله عوامل موثر بر تعیین SS می‌توان به هزینه کمبود کالا، سطح سرویس‌دهی، هزینه نگهداری کالا، انحراف معیار (پراکندگی) تقاضا و انحراف معیار موعد تحویل اشاره نمود.

www.pnu-club.com

- ✓ هرچه مقدار ذخیره اطمینان بیشتر باشد، هزینه نگهداری افزایش و متوسط هزینه کمبود کاهش می‌یابد. وقتی که جمع هزینه نگهداری SS و متوسط هزینه کمبود جهت SS حداقل شود، ذخیره اطمینان بهینه حاصل شده است.

۴-۱۰ سطح خدمت (میزان اطمینان از موجودی)

از آنجا که تخمین مقدار هزینه‌ی کمبود مشکل یا غیرممکن است، معمولاً مدیریت یک سطح خدمت معقولی را برای خدمت به مشتری درنظر می‌گیرد و سپس موجودی اطمینان را طوری تعیین می‌کند که سطح خدمت موردنظر تعیین شود. به عنوان مثال، شرکتی ممکن است سطح خدمت به مشتری برای نوع محصول خاصی (محصول A) ۹۵ درصد (معادل سطح خطر ۵ درصد) انتخاب کند. بدین معنی که در هر ۱۰۰ بار سفارش (هر ۱۰۰ دور سفارش) این محصول فقط ۵ بار کمبود رخ دهد، یا به عبارت دیگر در هر دور سفارش احتمال وقوع کمبود ۵ درصد باشد. در عمل مدیریت برای تعیین سطح خدمت ابتدا سطوح خدمت مختلفی درنظر گرفته و برای هر سطح خدمت، موجودی اطمینان مربوطه و هزینه نگهداری آن را محاسبه می‌کند. سپس این اطلاعات را در جدولی که در آن سطوح خدمت، موجودی‌های اطمینان مربوط به آنها و هزینه‌های نگهداری این موجودی‌های اطمینان نشان داده می‌شود، وارد می‌کند. مدیریت با استفاده از این جدول و باتوجه به امکانات و شرایط، مقدار سطح خدمت موردنظر را تعیین می‌کند.

فرض کنید که در طول یکسال، برای یک کالا ۲۶ دستور سفارش صادر شده است. در ۲۴ نوبت کالای سفارش داده شده به موقع به انبار رسیده و انبار دچار کمبود نشده است. ولی در دو نوبت کالا به انبار نرسیده است و یا تقاضا بصورت غیرقابل کنترلی بالا رفته است و درنتیجه انبار با کمبود کالا مواجه شده است و تامین تقاضا میسر نشده است. بنابراین در چنین حالتی می‌توان گفت میزان اطمینان از موجودی این انبار برای این کالا برابر $\frac{24}{26}$ وو یا ۹۲٪ است. لازم به ذکر است که چنانچه مقدار مصرف (تقاضا) در مدت تحویل که با D_L نشان داده می‌شود از مقدار موجودی در زمان سفارش (r) بیشتر باشد، انبار با کمبود کالا روبرو می‌شود، بنابراین، سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه نشویم، یعنی احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحویل کوچکتر یا مساوی نقطه سفارش $(r=\mu_{D_L}+SS)$ باشد:

میزان اطمینان از موجودی= $P=P_r$ {عدم کمبود در یک دوره} $=P_r\{D_L\le r\}=F_{DL}(r)$

$F_{DL}(r)$: تابع توزیع تجمعی در مدت زمان تحویل در نقطه r،

(1-P): سطح خطر (یا ریسک)، یعنی احتمال اینکه در یک دوره با کمبود روبرو شویم.

$$\text{میزان اطمینان از موجودی} = \frac{\text{متوسط تعداد دوره‌هایی که تقاضا تامین می‌شود}}{\text{تعداد کل دوره‌ها}}$$

اگر N_b برابر دوره‌هایی باشد که در یک سال با کمبود روبرو شده‌ایم، آنگاه متوسط فاصله زمانی بین دو کمبود متوالی (T_b) برابر است با:

$$T_b=\frac{1}{N_b}$$

$$1-P=\frac{\text{متوسط تعداد دوره‌های دارای کمبود به سال}}{\text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال}}=\frac{N_b}{\frac{\mu_D}{Q}}=N_b\times\frac{Q}{D}$$

www.pnu-club.com

همانطور که در بالا بیان شد، $P_r\{D_L \le r\}$ میزان اطمینان از موجودی و یا عدم کمبود در یک دوره را محاسبه می‌کند. بنابراین متمم رابطه فوق یعنی $P_r\{D_L > r\}$ متوسط تعداد کمبود در یک دوره که برابر سطح خطر است را محاسبه می‌نماید:

$$\text{متوسط تعداد کمبود در یک دوره} = \bar{b}_{(r)} = \int_r^{\infty} (x-r) f_{DL}(x)\, dx = P_r\{D_L > r\} = 1 - P$$

بنابراین متوسط تعداد کمبود در سال B(r) از حاصلضرب تعداد دوره‌ها (D/Q) در متوسط تعداد کمبود در یک دوره بدست می‌آید:

$$B(r) = \bar{b}_r \frac{D}{Q}$$

همچنین برای بدست آوردن درصد تقاضاهایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه شده‌اند، کافی است متوسط تعداد کمبود در سال را بر کل تقاضای سالیانه تقسیم نمود:

$$\text{درصد مشتریانی که با کمبود مواجه می‌شوند} = \frac{B(r)}{D} \times 100 = \frac{\bar{b}_r}{Q} \times 100$$

۵-۱۰ مدل‌های احتمالی

۱-۵-۱۰ مدل‌های احتمالی در حالت FOS

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با تفاوت‌های زیر:

۱- تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲- کمبود جایز است.

۳- خط‌مشی سفارش‌دهی FOS است.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q) و نقطه سفارش (r^*) با کمینه کردن هزینه‌ها است.

پارامترهای مدل:

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال،

μ_D: میانگین تقاضا در سال،

σ_D: انحراف معیار تقاضا در سال،

D_L: متغیر تصادفی تقاضا در مدل زمان تحویل،

μ_{DL}: میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل،

σ_{DL}: انحراف معیار تقاضا در مدت زمان تحویل،

P: سطح خدمت، سطح اطمینان

متغیرهای مدل:

Q: مقدار سفارش،

r: نقطه سفارش، حداقل موقعیت موجودی،

SS: موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی): موجودی اطمینان در مدل‌های احتمالی جهت جوابگویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان تحویل تعریف می‌گردد و مقدار آن در تعاملی بین کل هزینه‌هـای کمبـود و نگهـداری تعیین می‌شود.

✓ در صورتیکه SS افزایش یابد، کل هزینه‌های نگهداری افزایش و کل هزینه‌های کمبود کاهش می-یابد.

www.pnu-club.com

الگوریتم حل مدل احتمالی ساده FOS:

۱- Q^* را از رابطه ویلسون $Q_W = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$ محاسبه می‌نماییم، در این رابطه منظور از D، میانگین توزیع تقاضا در سال یعنی μ_D است.

۲- مقدار سطح خدمت (P) را بدست آورید.

$$1 - P = N_b \times \frac{Q}{D}$$

۳- مقدار نقطه سفارش را از رابطه زیر محاسبه نمایید:

- اگر تقاضا پیوسته باشد، مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل برابر با r می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت (P) شود.

$F_{DL}(r) = P$

- اگر تقاضا گسسته باشد، کوچکترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل که رابطه زیر را برقرار می‌کند برابر r می‌گردد.

$F_{DL}(r) \geq P$

۴- مقدار ذخیره اطمینان را بدست آورید:

$r = \mu_{D_L} + SS$

۵- متوسط مقدار کمبود در دوره ($\bar{b}(r)$)، متوسط مقدار کمبود در سال (B(r)) و درصد تقاضایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) را بدست آورید.

۶- متوسط موجودی در دست را محاسبه نمایید.

$$\text{متوسط موجودی در دست} = \bar{I} = \frac{Q}{2} + SS$$

بنابراین کل هزینه نگهداری سالیانه برابر با $h(\frac{Q}{2} + SS)$ خواهد بود.

✓ در کلیه مدل‌های با خطمشی FOS حداکثر موقعیت موجودی (r+Q) و حداقل موقعیت موجودی r می‌باشد.

مثال ۵- میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل محصول ۹۰ واحد و توزیع احتمالی تقاضای محصول در طی زمان تحویل آن در جدول زیر داده شد است. متوسط تقاضای سالیانه این محصول ۵۰۰ واحد و مقدار هربار سفارش آن ثابت و برابر ۵۰ واحد است.

X	80	85	90	95	100	105
P(X=x)	0.3	0.2	0.05	0.2	0.15	0.1

قرار است سطح خدمت (میزان اطمینان از موجودی) طوری انتخاب شود که احتمال کمبود در موقع دریافت هربار سفارش ۲۵٪ باشد. مطلوبست:

الف- موجودی اطمینان این محصول:

ب- بطور متوسط چه مدت زمان طول می‌کشد تا در یکی از دوره‌های سفارش کمبود رخ دهد؟

ج- مقدار متوسط کل کمبود در سال چقدر است؟

د- درصد مشتریانی که با کمبود موجودی روبرو می‌شوند چقدر است؟

حل:

الف-

www.pnu-club.com

X	80	85	90	95	100	105
$F_X(x)$	0.3	0.5	0.55	0.75	0.9	1

$1-P=0.25 \quad \rightarrow P=0.75$

به دنبال کوچکترین عدد صحیحی می‌گردیم که $F_x(r) \geq 0.75$ باشد. بنابراین:

$r = 95$

$\mu_{D_L}=\sum xP\{X=x\}=80(0.3)+85(0.2)+90(0.05)+100(0.15)+105(0.1)=90$

$SS=r-\mu_{D_L}=95-90=5$

ب-

$$1-P=N_b\times\frac{Q}{D} \quad \rightarrow N_b=\frac{D}{Q}(1-P)=\frac{500}{50}\times 0.25=2.5 \quad \rightarrow T_b=\frac{1}{N_b}=\frac{1}{2.5}=0.4 \text{ سال}$$

ج-

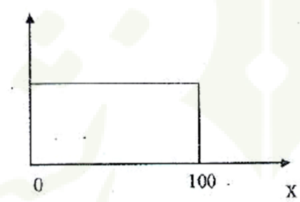
$$\bar{b}(r)=\sum_{95}^{105}(x-r)P\{D_L=x\}=(105-95)\times 0.1+(100-95)\times 0.15+(95-95)\times 0.2$$
$$=1.75$$

$$B(r)=\frac{D}{Q}\bar{b}(r)=\frac{500}{50}\times 1.75=17.5$$

د-

$$\text{درصد مشتریانی که با کمبود مواجه می‌شوند}=\frac{B(r)}{D}\times 100=\frac{17.5}{500}\times 100=3.5\%$$

مثال ۶- توزیع احتمالی تقاضای محصولی در طی مدت زمان تحویل یکنواخت بوده و چگالی آن بـه شـکل زیر است:



روش سفارش‌دهی این محصول روش مقدار سفارش ثابت بـوده و مقـدار سـفارش در هـر بـار ۴۰ واحـد و متوسط مصرف سالیانه این محصول ۴۰۰ واحد است. اگر قـرار باشـد در هـر دور سـفارش احتمـال کمبـود (کسری) مواد برابر ۱۰ درصد باشد، به سوالات زیر پاسخ دهید؟

الف- مقدار موجودی اطمینان را بدست آورید.

ب- حداقل موقعیت این محصول را محاسبه نمایید.

ج- درصد مشتریانی که با کمبود روبرو می‌شوند.

د- میانگین تعداد دوره‌های سفارش که در یک سال در آنها کمبود رخ می‌دهد چقدر است؟

حل:

الف-

$f(x)=\frac{1}{100}, \quad Q=40, \quad D=400, \quad 1-P=0.1 \rightarrow P=0.9$

$F_{D_L}(r)=P \rightarrow \int_0^r f(x)dx=0.9 \rightarrow \int_0^r \frac{1}{100}dx=0.9 \rightarrow \frac{r-0}{100}=0.9 \rightarrow r=90$

$\mu_{D_L}=\frac{100+0}{2}=50 \quad \rightarrow SS=r-\mu_{D_L}=90-50=40$

www.pnu-club.com

ب-

حداقل موقعیت موجودی = r = 90

ج-

$$\bar{b}(r) = \int_r^{100} (x-90)\frac{1}{100}\,dx = \left(\frac{x^2}{200} - \frac{90x}{100}\right)\Big|_{90}^{100} = 0.5$$

درصد مشتریانی که با کمبود مواجه می‌شوند $= \dfrac{\bar{b}(r)}{Q} \times 100 = \dfrac{0.5}{40} \times 100 = 1.125\%$

د-

$$1-P = \frac{N_b}{\frac{D}{Q}} \rightarrow N_b = \frac{D}{Q}(1-P) = \frac{400}{40} \times 0.1 = 1$$

۲-۵-۱۰ مدل‌های احتمالی در حالت FOI

فرضیات مدل مانند EOQ است با تفاوت‌های زیر:

۱- تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲- کمبود جایز است.

۳- خط‌مشی سفارش‌دهی FOI است.

هدف مدل تعیین مقدار سقف موجودی بهینه (R^*) و فاصله زمانی بهینه بین دو سفارش متوالی (T^*) با کمینه کردن هزینه‌هاست.

پارامترهای مدل:

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال،

μ_D: میانگین تصادفی تقاضا در سال،

σ_D: انحراف معیار تقاضا در سال،

D_{L+T}: متغیر تصادفی تقاضا در مدل زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره،

μ_{DL+T}: میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره،

σ_{DL+T}: انحراف معیار تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره،

P: سطح خدمت، سطح اطمینان، سطح ریسک.

متغیرهای مدل:

Q: مقدار سفارش،

r: نقطه سفارش، حداقل موقعیت موجودی،

متغیرهای مدل:

R: سقف موجودی، حداکثر موقعیت موجودی،

T: فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی،

SS: موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی): در مدل FOI، SS برابر است با مقداری از موجودی که جهت جوابگویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه زمان یک دوره سفارش تعریف می‌شود و مقدار آن در تعاملی بین هزینه‌های کمبود و هزینه نگهداری بدست می‌آید.

www.pnu-club.com

تعریف سطح خدمت در خط‌مشی FOI: سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره سفارش با کمبود مواجه نشویم و برابر است با احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره سفارش از حداکثر موقعیت موجودی (R^*) کوچکتر یا مساوی باشد.

$$P = P\{D_{L+T} \leq R\} = F_{D_{L+T}}(R)$$

1-P: سطح ریسک یا سطح خطر برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم:

$$1 - P = P\{D_{L+T} > R\} = 1 - F_{D_{L+T}}(R)$$

نحوه محاسبه سطح خدمت (P)

مقادیر N_b و T_b را با استفاده از فرمول‌های زیر بدست آورید:

$$1 - P = \frac{N_b}{\frac{1}{T}} = N_b T, \qquad T_b = \frac{1}{N_b}$$

الگوریتم حل مدل ساده FOI:

۱- مقدار T^* از رابطه زیر بدست آورید:

$$T^* = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}$$

۲- مقدار سطح خدمت از رابطه $1\text{-}P= TN_b$ بدست آورید.

۳- مقدار سقف موجودی (R) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

اگر تقاضا پیوسته باشد، مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه یک دوره سفارش برابر با R می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت P گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) = P$$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچکترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش که رابطه زیر را برقرار کند برابر R می‌گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) \geq P$$

۴- مقدار ذخیره اطمینان را از رابطه زیر بدست آورید:

$$R = \mu_{D_{L+T}} + SS \quad \rightarrow SS = R - \mu_{D_{L+T}}$$

۵- متوسط مقدار کمبود در دوره ($\bar{b}(R)$)، متوسط مقدار کمبود در سال (B(R)) و درصد تقاضایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) را بدست آورید.

$$\text{متوسط تعداد کمبود در یک دوره} = \bar{b}_{(R)} = \int_R^\infty (x - R) f_{D_{L+T}}(x)\, dx$$

$$B(r) = \frac{\bar{b}_{(R)}}{T}$$

$$\text{درصد مشتریانی که با کمبود مواجه می‌شوند} = \frac{B(R)}{D} \times 100 = \frac{\bar{b}_{(R)}}{DT} \times 100$$

۶- متوسط موجودی در دست را محاسبه نمایید.

$$\text{متوسط موجودی در دست} = \bar{I} = \frac{DT}{2} + SS$$

۳-۵-۱۰ مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOS در حالتی که تقاضا در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال باشد.

www.pnu-club.com

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال با میانگین μ_{DL} و واریانس $\sigma_{D_L}^2$ اسـت. توزیع نرمال از این جهت با دیگر توزیع‌ها متمایز است که می‌توان به راحتی با استانداردسازی احتمال‌هـای موردنظر را محاسبه و رابطه صریحی برای r پیدا نمود.

k_P: ضریب اطمینان $D_L \sim N(\mu_{D_L}, \sigma_{D_L}^2)$

$$P = P\{D_L \le r\} = P\left\{\underbrace{\frac{D_L - \mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}}_{Z\sim N(0,1)} \le \underbrace{\frac{r - \mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}}_{K_P}\right\} \rightarrow \frac{r - \mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}} = k_P$$
$$\rightarrow r = \mu_{D_L} + k_P\sigma_{D_L}, SS = k_P\sigma_{D_L}$$

درصورتیکه مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد، روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس بکار می‌رود.

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین μ_D و واریانس σ_D^2،

L: متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین μ_L و واریانس σ_L^2،

D_L: متغیر تصادفی در مدت زمان تحویل با میانگین μ_{D_L} و واریانس $\sigma_{D_L}^2$.

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times \mu_L \quad , \sigma_{D_L} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L\sigma_D^2}$$

بدین اساس حالت‌های زیر برای مدل قابل تصور است:

حالت ۱: تقاضا متغیری تصادفی با توزیع نرمال با میانگین μ_D و واریانس σ_D^2 و L ثابت و قطعی باشد. ثابـت بودن موعد تحویل به معنای صفر بودن واریانس L است. بنابراین:

$$\mu_{D_L} = L\mu_D, \quad \sigma_{D_L} = \sqrt{L}\sigma_D \rightarrow r = L\mu_D + k_P\sqrt{L}\sigma_D, \qquad SS = k_P\sqrt{L}\sigma_D$$

حالت ۲: تقاضا ثابت و قطعی و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال با میانگین μ_L و واریانس σ_L^2 باشد.

$$\mu_{D_L} = D\mu_L, \quad \sigma_{D_L} = D\sigma_L \rightarrow r = D\mu_L + k_P D\sigma_L, \qquad SS = k_P D\sigma_L$$

حالت ۳: تقاضا متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین μ_D و واریانس σ_D^2 و L متغیـر تصـادفی نرمـال بـا میانگین μ_L و واریانس σ_L^2 باشد.

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times \mu_L \quad \sigma_{D_L} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L\sigma_D^2}$$
$$\rightarrow r = \mu_D \times \mu_L + k_P\sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L\sigma_D^2}, SS = k_P\sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L\sigma_D^2}$$

مثال ۷- مقدار هربار سفارش محصولی ثابت و مدت زمان تحویل تصادفی و دارای توزیع نرمال با میـانگین ۴۰ روز و انحراف معیار ۲ روز است. نرخ تقاضای این محصول ثابت و برابر ۲۰ واحد در روز است. اگر سـطح خدمت (احتمال نداشتن کمبود در هر دور سفارش) مورد نظر برای این محصول ۹۰ درصد باشد، موجـودی اطمینان این محصول برابر چه مقداری است؟ (اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، $P\{X< 1.28\}=0.9$ است).

حل:

$$L \sim N(40, 4), D = 20, P = 0.9$$
$$\sigma_{D_L} = D\sigma_L = 20 \times 2 = 40, \qquad SS = k_P\sigma_{D_L} = 1.28 \times 40 = 51.2$$

www.pnu-club.com

مثال ۸- تقاضای سالیانه کالایی بصورت تابع نرمال با میانگین ۸۰۰۰ واحد و انحراف معیار ۱۰۰۰ واحد است. زمان انتظار تحویل کالا (Lead Time) ثابت و نیم ماه می‌باشد. اگر سطح سرویس این کالا ۰/۹۵ باشد، نقطه سفارش مجدد را محاسبه نمایید. [$P(z \le 1.64) = 0.95$]

حل:

$$D \sim N(8000, 1000^2), L = 0.5 \text{ ماه} = \frac{1}{24} \text{ سال}, \quad P = 0.95 \ \rightarrow k_P = 1.64$$

$$r = \mu_{DL} + SS = L \times \mu_D + k_P \times \sqrt{L}\sigma_D = \frac{1}{24} \times 8000 + 1.64 \times \sqrt{\frac{1}{24}} \times 1000 = 669$$

۴-۵-۱۰ مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOI در حالتی که تقاضا در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال باشد.

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_{D_{L+T}}$ و واریانس $\sigma^2_{D_{L+T}}$ است.

$$D_{L+T} \sim N(\mu_{D_{L+T}}, \sigma^2_{D_{L+T}})$$
$$P = P\{D_{L+T} \le R\} = P\left\{ \underbrace{\frac{D_{L+T} - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}}}_{Z \sim N(0,1)} \le \underbrace{\frac{R - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}}}_{k_P} \right\}$$
$$\rightarrow R = \mu_{D_{L+T}} + k_P \sigma_{D_{L+T}}, SS = k_P \sigma_{D_{L+T}}$$

درصورتیکه مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد، روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس بکار می‌رود.

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین μ_D و واریانس σ^2_D،

L: متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین μ_L و واریانس σ^2_L،

D_{L+T}: متغیر تصادفی در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره سفارش با میانگین $\mu_{D_{L+T}}$ و واریانس $\sigma^2_{D_{L+T}}$.

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T} \quad , \sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu^2_D \times \sigma^2_{L+T} + \mu_{L+T}\sigma^2_D}$$

چون T ثابت است:

$$\mu_{L+T} = \mu_L + T, \quad \sigma_{L+T} = \sigma_L$$

بدین اساس حالت‌های زیر برای مدل قابل تصور است:

حالت ۱: تقاضا متغیری تصادفی با توزیع نرمال با میانگین μ_D و واریانس σ^2_D و L ثابت و قطعی باشد. ثابت بودن موعد تحویل به معنای صفر بودن واریانس L است. بنابراین:

$$\mu_{D_{L+T}} = (L+T)\mu_D, \quad \sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{L+T}\sigma_D \rightarrow R = (L+T)\mu_D + k_P\sqrt{L+T}\sigma_D,$$
$$SS = k_P\sqrt{L+T}\sigma_D$$

حالت ۲: تقاضا ثابت و قطعی و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال با میانگین μ_L و واریانس σ^2_L باشد.

$$\mu_{D_{L+T}} = D\mu_{L+T} = D(\mu_L + T), \quad \sigma_{D_{L+T}} = D\sigma_{L+T} = D\sigma_L$$
$$\rightarrow R = D(\mu_L + T) + k_P D\sigma_L, \qquad SS = k_P D\sigma_L$$

www.pnu-club.com

حالت ۳: تقاضا متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین μ_D و واریانس σ_D^2 و L متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ_L و واریانس σ_L^2 باشد.

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T} = \mu_D(\mu_L + T),$$
$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_{L+T}^2 + \mu_{L+T}\sigma_D^2} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + (\mu_L + T)\sigma_D^2}$$

مثال ۹- محصولی هر سه ماه یکبار سفارش داده می‌شود، مدت تحویل این محصول یک ماه است. توزیع تقاضای این محصول در طی مدت t (به ماه) نرمال با میانگین 100t و انحراف معیار $10\sqrt{t}$ است. اگر سطح خدمت و احتمال نبودن کمبود در هر دوره سفارش این محصول 90%باشد، حداکثر موقعیت موجودی این محصول چقدر است؟ $(P\{X \le 1.28\} = 0.9)$

حل:

$$T = 3, L = 1, \quad D \sim N\left(100t, (10\sqrt{t})^2\right), \quad P = 0.9 \to k_P = 1.28, \quad L + T = 3 + 1 = 4$$

$$\mu_{D_t} = 100t \ \ \to \mu_{D_{L+T}} = \mu_{D_4} = 100 \times 4 = 400$$

$$\sigma_{D_t} = 10\sqrt{t} \ \ \to \sigma_{D_{L+T}} = \sigma_{D_4} = 10\sqrt{4} = 20$$

$$R = \mu_{D_{L+T}} + k_P\sigma_{D_{L+T}} = 400 + 1.28 \times 20 = 425.6$$

مثال ۱۰- طول دوره سفارش T (فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی) برای محصولی ثابت و برابر ۱ ماه انتخاب شده است. مدت تحویل این محصول ۳ ماه است. توزیع تقاضای این محصول در طی هر ماه متغیر تصادفی با توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰ واحد و انحراف معیار ۲۰ واحد است. قرار است سطح خدمت این محصول طوری انتخاب شود که احتمال کمبود در موقع دریافت سفارش ۵ درصد باشد. متوسط موجودی این محصول را بدست آورید. $(P\{z < 1.65\} = 0.95)$

حل:

$$T = 1, \quad L = 3, \quad D \sim N(100, 20^2)$$

$$SS = k_P\sigma_{D_{L+T}} = k_P\sqrt{(\mu + T)}\sigma_D = 1.65 \times \sqrt{(3 + 1)} \times 20 = 66$$
$$\to \bar{I} = SS + \frac{DT}{2} = 66 + \frac{100 \times 1}{2} = 116$$

۵-۵-۱۰ مقایسه بین مدل احتمالی FOS و مدل احتمالی FOI

FOI	FOS	
R	r+Q	حداکثر موقعیت موجودی
معلوم نمی‌باشد	r	حداقل موقعیت موجودی
$DT/2 + SS_{FOI}$	$Q/2 + SS_{FOS}$	متوسط موجودی در دست
SS_{FOI}	SS_{FOS}	موجودی اطمینان
$K_P D_{L+T}$	$K_P\sigma_{DL}$	موجودی اطمینان در حالت نرمال
h(متوسط موجودی در دست)	h(متوسط موجودی در دست)	کل هزینه نگهداری سالیانه
π B(R)	π B(r)	کل هزینه کمبود سالیانه

شرط مقایسه موارد فوق برابر بودن تمامی پارامترها ازجمله سطح خدمت (P) است (شرایط یکسان است)

www.pnu-club.com

مثال ۱۱- مصرف روزانه کالایی ثابت و برابر ۱۰ واحد اما موعد تحویل این کالا (Lead Time) متغیر و براساس جدول زیر می‌باشد، مقدار سفارش این کالا ثابت و برابر ۴۰۰ واحد است، در صورتیکه هزینه نگهداری هر واحد ۲ تومان در سال و کل هزینه‌های نگهداری برابر ۴۸۰ تومان در سال باشد، نقطه سفارش مجدد این کالا را بدست آورید.

موعد تحویل	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
احتمال	0.05	0.07	0.15	0.2	0.15	0.12	0.1	0.08	0.05	0.03

حل:

$D = 10$ عدد در روز, $\quad Q = 400, \quad h = 2,$

$$h\bar{I} = 480 \rightarrow h\left(\frac{Q}{2} + SS\right) = 480 \rightarrow 2\left(\frac{400}{2} + SS\right) = 480 \rightarrow SS = 40$$

$$\mu_L = 4(0.05) + 5(0.07) + 6(0.15) + 7(0.2) + 8(0.15) + 9(0.12) + 10(0.1) + 11(0.08) + 12(0.05) + 13(0.03) = 8$$

$$\mu_{D_L} = D\mu_L = 10 \times 8 = 80$$

$$r = \mu_{D_L} + SS = 80 + 40 = 120$$

www.pnu-club.com