فصل ششم

مدل‌های چندمحصولی و چندمحصولی محدودیت‌دار

- *مقدمه*
- *مدل‌های چندمحصولی*
- *مدل‌های چندمحصولی محدودیت‌دار*
- *تمرین*

۱-۶ مقدمه

در فصول قبل همواره وضعیت موجودی و سیاست‌های سفارشات کالاها به صورت منفرد و مستقل از سایر کالاهای موجود در انبار بررسی گردید. اما، در دنیای واقعی، اکثر سیستم‌های موجودی، بـه ذخیـره بیش از یک کالا می‌پردازند و ارتباطاتی در رابطه با یکدیگر دارند. ممکن است سرمایه لازم برای تامین همه کالاها وجود نداشته باشد و یا محدودیت ظرفیت انبار، سبب رقابت کالاها برای استفاده از فضای انبار شـود. اگر هیچ محدودیتی (مانند ظرفیت انبار، تعداد سفارشات در سال، سـرمایه‌گـذاری در موجـودی‌هـا) وجـود نداشته باشد، می‌توان هر محصول را جداگانه بررسی کرد. ولی در عمل محدودیت‌ها وجود دارند.

در این فصل، مدل‌های چندمحصولی در قالب بخش ۲-۶ و مدل‌های چندمحصـولی محـدودیت‌دار در قالب بخش ۳-۶ مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲-۶ مدل‌های چندمحصولی

در این قسمت، مدل‌های سفارش و تولید اقتصادی برای چند محصول فرموله می‌شوند. در حالیکه بتوانیم هر محصول را در هر موقع دلخواه سفارش دهیم یا تولید کنیم، مدل سیستم موجودی همانند مدل‌های ساده تک محصولی قبلی رفتار می‌کند، ولی هنگامیکه بخواهیم محصولات را با هم سـفارش دهـیم، در حقیقت قائل به ارتباط میان محصولات می‌شویم.

۱-۲-۶ مدل چندمحصولی ساده

اگر چند محصول داشته باشیم که هر کدام از آنها به تنهایی از مدل EOQ پیروی کننـد، چنانچـه هیچ محدودیتی نداشته باشیم و کالاها با یکدیگر ارتباطی نداشته باشند، برنامه‌ریزی برای این چند محصول از مدل چندمحصول ساده پیروی می‌کند و تمامی فرضیات مدل EOQ همچنان برقرار اسـت، در اینصـورت هزینه و مقدار سفارش اقتصادی برای محصول jام (j=1, 2, …, n)، از روابط ۱-۶ تا ۳-۶ محاسبه می‌شوند:

$$Tc = \left(\frac{D_1A_1}{Q_1} + \frac{h_1Q_1}{2} + C_1D_1\right) + \cdots + \left(\frac{D_nA_n}{Q_n} + \frac{h_nQ_n}{2} + C_nD_n\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{D_jA_j}{Q_j} + \frac{h_jQ_j}{2} + C_jD_j\right) \tag{6-1}$$

$$\frac{\partial Tc}{\partial Q_j} = 0 \;\rightarrow\; Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_jA_j}{h_j}}\,, \quad j = 1,2,\dots,n \tag{6-2}$$

$$Tc^* = \sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{2D_jA_jh_j} + C_jD_j\right) \tag{6-3}$$

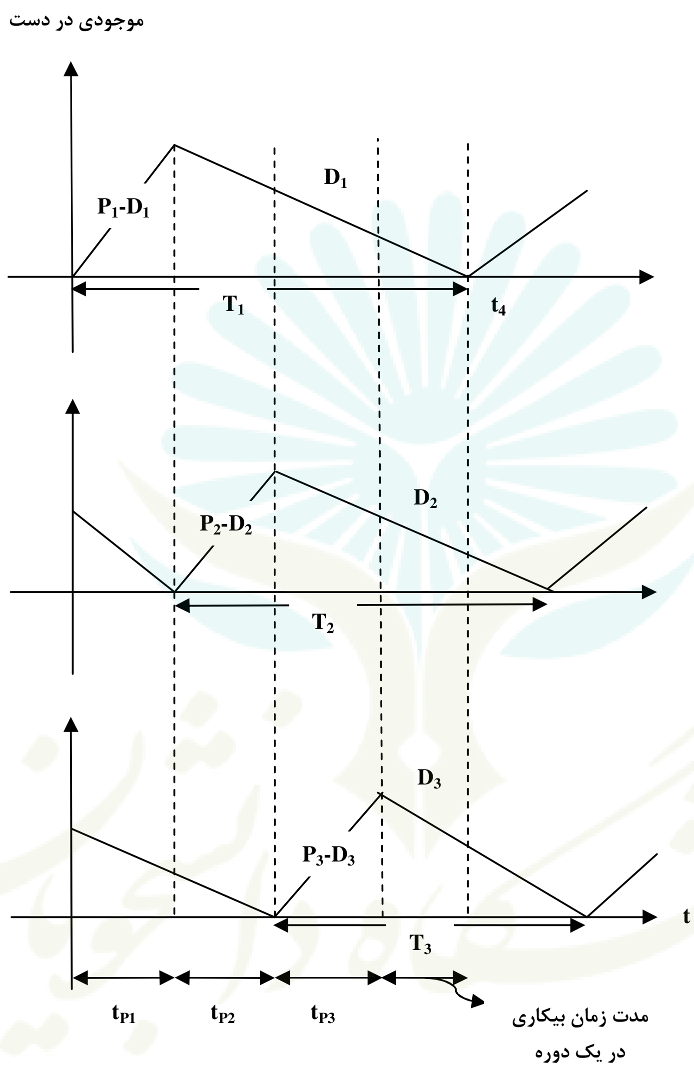
۲-۲-۶ مدل چندمحصولی تولیدی

چنانچه چند محصول مختلف را با یک خط تولید یا یک ماشین تولید نمـاییم، برنامـه‌ریـزی بـرای این چندمحصول از مدل چندمحصولی تولیدی پیروی می‌کند. در این حالت داریم:

$$Tc = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{D_jA_j}{Q_j} + \frac{h_j}{2}Q_j\left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right) + C_jD_j\right) \tag{6-4}$$

$$Q_i = \sqrt{\frac{2D_jA_j}{h_j}}\sqrt{\frac{P_j}{P_j - D_j}} \tag{6-5}$$

در این حالت چون تولید هر محصول باید پس از پایان تولید محصول قبلی باشد، لذا دوره‌ها با یکدیگر تداخل دارند و ممکن نیست بصورت سیستم FOS عمل کنیم. فرض کنید، سه محصول ۱، ۲ و ۳ که توسط یک ماشین تولید می‌شوند دارای نمودار موجودی در دست برحسب زمان بصورت شکل ۱-۶ باشند:



شکل ۱-۶ نمودار موجودی خالص در حالتی که چندکالا به صورت تدریجی وارد انبار می‌شود

پس از زمان t_{p1}، که تولید محصول اول به پایان می‌رسد، تولید محصول دوم توسط ماشین آغاز می‌شود، در زمان t_{p2}، تولید محصول دوم به پایان رسیده و تولید محصول سوم آغاز می‌شود. t_{p3} نشان‌دهنده پایان تولید محصول سوم است و ماشین مجدداً باید محصول اول را تولید نماید، پایان دوره زمانی T_1 (t_4) زمان شروع مجدد برای تولید محصول اول است. اگر ($t_{p3} > t_4$) باشد، محصول اول با کمبود موجودی مواجهه می‌شود، اما چنانچه مانند نمودار ۱-۶ ($t_{p3} < t_4$) باشد، فاصله زمانی t_{p3}-t_4 ماشین بیکار است و بیکاری ماشین بوجود می‌آید. بنابراین، اهمیت برنامه‌ریزی و بدست آوردن یک مدل مشخص برای تولید چندمحصول توسط یک ماشین کاملاً ضروری است.

برای حل مدل لازم است تعاریف و پارامترها[1] بیان شوند:

P_j: نرخ تولید محصول j ام،

T_j: فاصله زمانی میان دوبار آماده‌سازی متوالی یا مدت زمان سیکل تولیدی محصول j ام (سیکل تولیدی محصول j ام برابر زمان تولید و مصرف محصول j ام به اضافه زمان مصرف محصول j ام است).

t_j: درصد زمانی از سال که ماشین به تولید محصول j ام مشغول است:

$$t_j = \frac{\text{تقاضای محصول } j \text{ ام}}{\text{نرخ تولید محصول } j \text{ ام}} = \frac{D_j}{P_j} \tag{6-6}$$

$\frac{t_{Pj}}{T_j}$: درصد زمانی از یک دوره که ماشین مشغول تولید محصول jام است:

$$\frac{t_{pj}}{T_i} = \frac{\frac{Q_j}{P_j}}{\frac{Q_j}{D_j}} = \frac{D_j}{P_j} \tag{6-7}$$

کسرهای فوق چون از جنس درصد هستند، بنابراین واحد نداشته و در دوره یا سال بودن آن‌ها تفاوتی نمی‌کند و باهم برابر هستند.

درصد زمان کار ماشین (در سال یا دوره : $\sum \frac{D_j}{P_j}$

درصد زمان بیکاری ماشین در سال: $1 - \sum \frac{D_j}{P_j}$

مدت زمان بیکاری در دوره : $\left(1 - \sum \frac{D_j}{P_j}\right) T$

شرط جواب داشتن مساله این است که درصد زمان کار ماشین از یک کمتر باشد، یا به عبارتی درصد زمان بیکاری ماشین از صفر بیشتر باشد، درغیراینصورت امکان تولید محصول وجود ندارد.

$$1 - \sum \frac{D_j}{P_j} \geq 0 \;\rightarrow\; \sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1 \tag{6-8}$$

برای سادگی این مدل به گونه‌ای برنامه‌ریزی می‌شود که مدت زمان دوره محصولات با یکدیگر برابر باشد، یعنی فرض می‌شود: $\forall T_j = T$، کل هزینه متغیر سالیانه برابر است با:

$$\text{کل هزینه متغیر سالیانه} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j}{2} Q_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)\right) \tag{6-9}$$

$$\text{تعداد دوره ها} = N_j = \frac{D_j}{Q_j} = \frac{1}{T_j} \xrightarrow{\text{با در نظر گرفتن فرض ابتدایی مساله}} \frac{\mathrm{D_j}}{\mathrm{Q_j}} = \frac{1}{\mathrm{T_j}} = \frac{1}{\mathrm{T}} \tag{6-10}$$

$$\text{کل هزینه متغیر سالیانه} = \frac{1}{T} \sum A_j + \frac{T}{2} \sum_{j=1}^{n} h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right) \tag{6-11}$$

برای بدست آوردن T_0 از کل هزینه متغیر سالیانه نسبت به T مشتق می‌گیریم و حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم.

[1] . ذکر این نکته ضروری است که تمامی کالاها توسط یک ماشین یا یک خط تولید، تولید می‌شوند.

$$\frac{d(\text{کل هزینه متغیر سالیانه})}{dT} = 0 \;\rightarrow\; T_0 = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j (1-\frac{D_j}{P_j})}} \qquad (6\text{-}12)$$

برای بدست آوردن مقدار سفارش بهینه کالای jام داریم:

$$Q_j^* = T_0 D_j \qquad (6\text{-}13)$$

$$Tc(Q_j^*) = \sqrt{2(\sum A_j \sum D_j h_j \left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)} = \frac{2\sum A_j}{T_0} = T_0 \sum_{j=1}^{n} h_j D_j \left(1-\frac{D_j}{P_j}\right) \qquad (6\text{-}14)$$

۱-۲-۲-۶ الگوریتم حل مدل چندمحصولی تولیدی

گام اول: نامساوی $\sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1$ را چک کنید. در صورت برقراری نامساوی به گام ۲ بروید، درغیراینصورت مساله جواب ندارد، یعنی امکان تولید این محصولات با ماشین داده شده وجود ندارد.

گام دوم: مقدار T_0 را باتوجه به فرمول ۱۲-۶ بدست آورید و باتوجه به آن مقدار Q^*_j را محاسبه نمایید.

مثال ۱– در یک کارگاه صنعتی سه نوع محصول توسط یک ماشین تولید می‌شوند. ظرفیت تولیدی این ماشین برای محصول یک ۲۷۰۰۰ واحد در سال، برای محصول ۲ برابر ۳۶۰۰۰ واحد در سال، و برای محصول ۳ برابر ۹۰۰۰ واحد در سال است.

محصول	۱	۲	۳
مصرف سالیانه به واحد	۹۰۰۰	۱۸۰۰۰	۶۰۰۰
هزینه نگهداری هر واحد در سال به تومان	۵	۶	۸
هزینه هر بار سفارش به تومان	۸۰۰	۷۰۰	۵۰۰

پاسخ:

$D_1= 9000,\quad P_1= 27000,\quad h_1= 5,\quad A_1= 800$

$D_2= 18000,\quad P_2= 26000,\quad h_2= 6,\quad A_2= 700$

$D_3= 6000,\quad P_3= 9000,\quad h_3= 8,\quad A_3= 500$

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{D_j}{P_j} = \frac{9000}{27000}+\frac{18000}{36000}+\frac{6000}{9000} = 1.5 \;\leq 1$$ مساله جواب ندارد

حال اگر بدون توجه به شرط جواب‌دار بودن مساله به حل آن می‌پرداختیم:

$$T_0 = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}} = \sqrt{\frac{2\times(800+700+500)}{5\times9000\left(1-\frac{9000}{27000}\right)+6\times18000\left(1-\frac{18000}{36000}\right)+8\times6000\left(1-\frac{6000}{9000}\right)}} = 0.2$$

$$\rightarrow \begin{cases} Q_1^* = T_0 D_1 = 1800 \\ Q_2^* = T_0 D_2 = 3600 \\ Q_3^* = T_0 D_3 = 1200 \end{cases}$$

۲-۲-۲-۶ مدل چندمحصولی تولیدی با زمان آماده‌سازی

در دنیای واقعی، تولید هر محصول، مستلزم صرف زمان آماده‌سازی دستگاه قبل از تولید آن محصول می‌باشد. چنانچه زمان آماده‌سازی محصولات کمتر از زمان بیکاری موجود در یک دوره باشد، می‌توان به تولید ادامه داد، درغیراینصورت، باید T_0 را طوری تغییر داد که زمان آماده‌سازی را دربرگیرد. اگر:

S_j: زمان هربار آماده‌سازی محصول jام باشد:

$$\sum_{j=1}^{n}(t_{Pj}+S_j)\le T \;\rightarrow\; \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{Q_j}{P_j}+S_j\right)\le T \;\rightarrow\; \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{D_jT}{P_j}+S_j\right)\le T$$

$$\rightarrow T\ge \frac{\sum_{j=1}^{n}S_j}{1-\sum_{j=1}^{n}\frac{D_j}{P_j}} \qquad (6\text{-}15)$$

که: $$T_{min}=\frac{\sum_{j=1}^{n}S_j}{1-\sum_{j=1}^{n}\frac{D_j}{P_j}} \qquad (6\text{-}16)$$

اگر $\sum S_j\le\left(1-\sum\frac{D_j}{P_j}\right)T_0$ آنگاه $$T_0=\sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_jD_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}} \qquad (6\text{-}17)$$

اگر $\sum S_j>\left(1-\sum\frac{D_j}{P_j}\right)T_0$ آنگاه $$T_{min}=\frac{\sum_{j=1}^{n}S_j}{1-\sum_{j=1}^{n}\frac{D_j}{P_j}} \qquad (6\text{-}18)$$

بنابراین، الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود:

گام اول- به مقایسه T_0 و T_{min} می‌پردازیم و ماکزیمم آن‌ها را به عنوان T^* درنظر می‌گیریم:

$$T^*=\max\{T_0,T_{min}\}$$

گام دوم- با استفاده از فرمول $Q_j^*=T^*D_j$ مقادیر مختلف Q_j^* را بدست می‌آوریم.

هزینه مدل نیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$Tc=\begin{cases}\sqrt{2\sum A_j\sum h_jD_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)} & \text{اگر } T^*=T_0 \text{ باشد}\\ \frac{1}{T}\sum A_j+\frac{T}{2}\sum_{j=1}^{n}h_jD_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right) & \text{اگر } T^*=T_{min} \text{ باشد}\end{cases} \qquad (6\text{-}19)$$

- ✓ اگر $\sum_{j=1}^{n}(t_{Pj}+S_j)=T$، یعنی اینکه در کل زمان t_d، در حال set up دستگاه برای تولید بعدی هستیم.

مثال ۲- یک شرکت تولید پارچه، چهار نوع پارچه فاستونی به نامهای ظریف، چهارفصل، خوش‌پوش و نیک‌پوش را در کارگاه تولید می‌نماید. مقادیر تقاضای سالیانه انواع فاستونی‌های این شرکت، سرعت تولید انواع فاستونی‌ها در کارگاه و همچنین هزینه‌های نگهداری در جدول آمده است.

محصول	ظریف	چهارفصل	خوش‌پوش	نیک‌پوش
میزان تقاضا (متر در سال)	۳۰۰۰۰	۲۴۰۰۰	۳۱۲۰۰	۶۰۰۰۰
سرعت تولید (متر بر ساعت)	۱۰۰	۸۰	۱۲۰	۲۰۰
واحد هزینه نگهداری (تومان به ازای هر متر در سال	۳۰۰	۲۰۰	۱۵۰	۲۵۰

هر بار که تولید یک نوع محصول به اتمام می‌رسد ۱۲ ساعت از زمان کارگاه صرف آماده‌سازی تجهیزات برای تولید محصول بعدی می‌گردد. چنانچه هزینه هر یک ساعت کار کارگاه ۵۱۶۹۳ تومان باشد، مطلوبست:

الف- محاسبه مقدار اقتصادی تولید هر یک از چهار محصول فوق در هر بار تولید.

ب- محاسبه زمان یک سیکل تولیدی.

ج- محاسبه زمان بیکاری در هر سیکل تولیدی.
کارگاه دو شیف در هر روز کار می‌نماید. ساعت کاری را برابر ۸ ساعت در هر شیفت و یک سال را برابر ۲۵۰ روز درنظر بگیرید.

پاسخ:

الف و ب-

ابتدا لازم است سرعت تولید (P)، را به واحد متر در سال تبدیل نماییم:

$$P\frac{\text{متر}}{\text{سال}} = x\frac{\text{متر}}{\text{ساعت}} \times 8\frac{\text{ساعت}}{\text{شیفت}} \times 2\frac{\text{شیفت}}{\text{روز}} \times 250\frac{\text{روز}}{\text{سال}} = 4000\left(x\frac{\text{متر}}{\text{سال}}\right)$$

محصول	ظریف	چهارفصل	خوش‌پوش	نیک‌پوش
D_j	۳۰۰۰۰	۲۴۰۰۰	۳۱۲۰۰	۶۰۰۰۰
P_j	۴۰۰۰۰۰	۳۲۰۰۰۰	۴۸۰۰۰۰	۸۰۰۰۰۰
$\frac{D_j}{P_j}$	۰/۰۷۵	۰/۰۷۵	۰/۰۶۵	۰/۰۷۵

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{D_j}{P_j} = 0.075 + 0.075 + 0.065 + 0.075 = 0.29 \leq 1$$ مساله جواب امکان‌پذیر دارد

$$T_0 = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}} =$$

$$\sqrt{\frac{2\times12(51693+51693+51693+51693)}{300\times30000\left(1-\frac{30000}{400000}\right)+200\times24000\left(1-\frac{24000}{320000}\right)+150\times31200\left(1-\frac{31200}{480000}\right)+250\times60000\left(1-\frac{60000}{800000}\right)}} =$$

0.4 سال $= 0.4 \times 250 = 100$ روز

زمان آماده‌سازی را به واحد روز محاسبه می‌کنیم:

$$\left(\frac{\text{تولید}}{\text{سیکل}}\right)4 \times 12\left(\frac{\text{ساعت}}{\text{تولید}}\right) \times \frac{1}{16}\left(\frac{\text{روز}}{\text{ساعت}}\right) = 3 \text{ روز}$$

$$\sum S_j \leq \left(1-\sum\frac{D_j}{P_j}\right)T_0 \rightarrow T_0 = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}}, \begin{cases} Q_1^* = T_0 D_1 = 12000 \\ Q_2^* = T_0 D_2 = 9600 \\ Q_3^* = T_0 D_3 = 12480 \\ Q_4^* = T_0 D_4 = 24000 \end{cases}$$

ج-

مدت زمان بیکاری در دوره $=\left(1-\sum\frac{D_j}{P_j}\right)T = (1-0.29)\times 100 = 71$

زمان آزاد در هر سیکل تولید = 71 -3= 68 روز

مثال ۳- سیکل تولید بهینه ۳ محصول که توسط یک ماشین تولید می‌شوند، برابر با ۲ سال است. مدت زمان بیکاری این محصولات در سال برابر با ۰/۱ سال است. اگر زمان آماده‌سازی هر محصول برابر با ۰/۰۵ سال باشد، آنگاه در حالت جدید (بادرنظر گرفتن زمان آماده‌سازی) سیکل بهینه چقدر خواهد بود؟

پاسخ:

$T_0 = 2$ سال , زمان بیکاری$=1-\sum \frac{D_j}{P_j} = 0.1$, $S_j = 0.05$

$$T_{min} = \frac{\sum_{j=1}^{n} S_j}{1-\sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{P_j}} = \frac{3 \times 0.05}{0.1} = 1.5 \ \rightarrow T^* = \max\{2, 1.5\} = 2$$

بنابراین سیکل بهینه تغییری نخواهد کرد.

۳-۲-۲-۶ مدل چندمحصولی در حالت الزام سفارش همزمان

چنانچه در مدل چندمحصولی ساده که در بخش ۱-۲-۶ توضیح داده شد، الزام سفارش همزمان محصولات نیز وجود داشته باشد، طریقه حل مدل عوض خواهد شد.

الگوریتم حل:

گام اول: با توجه به اینکه محصولات باید همزمان باهم سفارش داده شوند، یعنی باید دوره تمامی آن‌ها با یکدیگر برابر باشند، بنابراین ابتدا به محاسبه T^* می‌پردازیم:

$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}} \qquad (6\text{-}20)$$

گام دوم: با توجه به فاصله زمانی بهینه بین دو سفارش متوالی که در گام اول بدست آمد با استفاده از فرمول $Q_j^* = T^* D_j$ مقدار سفارش بهینه را محاسبه و هزینه کل را از رابطه $Tc(Q_j^*) = \sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j}$ بدست می‌آوریم.

در این حالت: جمع هزینه نگهداری کل= جمع هزینه سفارش‌دهی کل برای همه کالاها

۳-۶ مدل‌های چندمحصولی محدودیت‌دار

در دنیای واقعی، اکثر سیستم‌های موجودی که به ذخیره بیش از یک کالا می‌پردازند، دارای محدودیت‌هایی می‌باشند که این محدودیت‌ها گاهی اوقات سبب کوچک شدن فضای جواب و درنتیجه افزایش هزینه‌های سیستم موجودی می‌شوند (چنانچه محدودیت‌ها کارکردی نباشند، تغییری در میزان هزینه‌های سیستم موجودی بوجود نمی‌آید). در این قسمت، محدودیت‌های فضا، سرمایه، تعداد دفعات سفارش و تعداد دفعات سفارش همراه با الزام سفارش همزمان مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱-۳-۶ محدودیت فضا

فرض کنید که n کالا در یک انبار که حداکثر ظرفیت آن F است، ذخیره می‌شوند. چنانچه مواجهه با کسری کالا مجاز نباشد و هر یک از محصولات از مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) پیروی نمایند، هدف مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی هر محصول می‌باشد. اگر

F: حداکثر حجم یا سطح انبار،

f_j: سطح یا حجمی که محصول jام اشغال می‌کند،

Q_j: مقدار سفارش اقتصادی محصول jام،

D_j: نرخ تقاضای سالیانه محصول jام،

A_j: هزینه ثابت سفارش محصول jام،

C_j: هزینه هر واحد محصول jام (مستقل از Q_j)،

i_j: نرخ هزینه نگهداری محصول jام باشد:

در اینصورت حداکثر فضای اشغالی محصول jام از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\text{حداکثر فضای اشغالی محصول } j \text{ ام} = \text{حداکثر موجودی محصول } j \text{ ام} \times f_j \qquad (6\text{-}21)$$

و محدودیت فضای انبار بصورت زیر خواهد بود:

$$\sum_j f_j \left(\text{حداکثر موجودی محصول } j \text{ ام}\right) \le F \qquad (6\text{-}22)$$

از آنجا که در مدل مقدار سفارش اقتصادی، $Q_w= I_{max}$، بنابراین برای بررسی محدودیت باید رابطه زیر را بررسی نمود:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j Q_j \le F \qquad (6\text{-}23)$$

با توجه به اینکه متوسط هزینه متغیر سالیانه برای تمامی محصولات عبارت است از:

$$Tc = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{D_j}{Q_j}A_j + i_j C_j \frac{Q_j}{2}\right] \qquad (6\text{-}24)$$

بنابراین، هدف این مدل بدست آوردن می‌نی‌مم هزینه‌ها با توجه به محدودیت فضای انبار می‌باشد:

$$\begin{cases} MinZ = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{D_j}{Q_j}A_j + i_j C_j \frac{Q_j}{2}\right] \\ S.t: \qquad \sum_{j=1}^{n} f_j Q_j \le F \end{cases} \qquad (6\text{-}25)$$

- ✓ چنانچه محصولات از مدل مقدار سفارش اقتصادی پیروی نکنند، برای بررسی محدودیت باید I_{max} را در نامعادله جایگزین نماییم. به عنوان مثال در مدل EPQ بایستی $I_{max}= Q(1\text{-}D/P)$ را جایگزین نمود.

۱-۱-۳-۶ الگوریتم حل مدل با محدودیت فضا

گام اول- ابتدا مساله را بدون درنظر گرفتن محدودیت حل می‌کنیم، یعنی Q^*_j را بدست می‌آوریم:

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_jA_j}{i_jC_j}}, \qquad j = 1,2,\dots,n \qquad (6\text{-}26)$$

اگر Q^*_j های به دست آمده محدودیت موردنظر را برقرار نمایند، این مقادیر بهینه هستند و محدودیت فعال نیست، یعنی فضای لازم در اختیار می‌باشد و با افزایش فضای انبار نمی‌توان متوسط هزینه‌های سالیانه را کاهش داد. درصورتی که Q^*_j های بدست آمده نتوانند محدودیت را برقرار نمایند، این محدودیت فعال است و Q^*_j های بدست آمده بهینه نیستند. برای ادامه حل به گام ۲ بروید.

گام ۲- برای پیدا کردن Q_j بهینه از تابع افزاینده لاگرانژ استفاده می‌شود:

$$\text{تابع لاگرانژ } J = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{D_j}{Q_j}A_j + i_j C_j \frac{Q_j}{2}\right] + \theta\left(\sum_{j=1}^{n} f_j Q_j - F\right) \qquad (6\text{-}27)$$

θ، افزاینده لاگرانژ یا هزینه نسبی بررسی یا قیمت جزیی فضای کف می‌باشد.

برای حل مدل، از تابع لاگرانژ نسبت به Q_j و θ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial J}{\partial Q_j} = 0 \rightarrow -\frac{D_j}{{Q_j}^2}A_j + \frac{i_j C_j}{2} + \theta f_j = 0 \qquad (6\text{-}28)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^{n} f_j Q_j - F = 0 \qquad (6\text{-}29)$$

مقدار بهینه سفارش طبق فرمول زیر بدست می‌آید:

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_jA_j}{i_jC_j+2\theta^* f_j}} \qquad (6\text{-}30)$$

ابتدا، با استفاده از رابطه ۳۱-۶، مقدار θ^* را بدست آورید و در فرمول ۳۰-۶ جایگزین نمایید تا Q^*_j بدست آیند.

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \sqrt{\frac{2D_jA_j}{i_jC_j+2\theta^* f_j}} = F \qquad (6\text{-}31)$$

✓ از آنجا که مراحل ارائه شده طولانی می‌باشد، برای حل اکثر تست‌ها می‌توانید به این صورت عمل نمایید:

ابتدا Q^*_j ها را از فرمول EOQ محاسبه نمایید، چنانچه محدودیت را نقض کردند، گزینه‌هایی را پیدا کنید که دو شرط زیر را برقرار نماید:

۱- $Q_j < Q^*_j$

۲- به ازای آنها داشته باشیم $\sum f_jQ_j = F$

مثال ۴- کارخانه‌ای سه نوع کالای سفارشی ۱، ۲ و ۳ دارد، این کارخانه در حدود ۷۰۰ مترمربع فضا جهت انبار کردن کالا دارد. با توجه به اطلاعاتی که در جدول زیر آمده است:

	کالای ۱	کالای ۲	کالای ۳
تقاضای سالیانه (واحد)	۵۰۰۰	۲۰۰۰	۱۰۰۰۰
هزینه سفارش (تومان)	۱۰۰	۲۰۰	۷۵
هزینه خرید (تومان)	۱۰	۱۵	۵
مساحت اشغال شده توسط هر واحد (متر مربع)	۰/۷	۰/۸	۰/۴
نرخ هزینه نگهداری	۰/۲	۰/۲	۰/۲

مطلوبست، محاسبه مقدار سفارش بهینه کالای ۱، ۲ و ۳.

الف- ۷۰۷، ۵۱۶، ۱۲۲۴ ب- ۷۰۷، ۲۸۰، ۱۲۲۴

ج- ۳۸۴، ۲۸۰، ۵۷۱ د- ۳۸۴، ۵۱۶، ۵۷۱

پاسخ:

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$F = 700m^2$

$\sum f_j Q_j \le F \rightarrow 0.7Q_1 + 0.8Q_2 + 0.4Q_3 \le 700$

$$Q_{w1} = \sqrt{\frac{2A_1D_1}{h_1}} = 707, \quad Q_{w2} = 516, \quad Q_{w3} = 1224$$

$$\rightarrow 0.7(707) + 0.8(516) + 0.4(1224) = 1398 \geq 700$$

مشاهده می‌شود که در محدودیت صدق نمی‌کند. بنابراین، از میان گزینه‌ها، باید به دنبال جوابی گشت که از Q_{wj} ها کوچکتر باشد. تنها گزینه، گزینه ۳ می‌باشد:

$$0.7(384) + 0.8(280) + 0.4(571) = 696 \leq 700$$

۲-۳-۶ محدودیت سرمایه درگیر در موجودی

مدل محدودیت سرمایه درگیر در موجودی شباهت بسیار زیادی با مدل محدودیت فضا دارد. اگر:

x: حداکثر سرمایه درگیر در موجودی،

C_j: قیمت هر واحد محصول jام،

Q_j: مقدار سفارش محصول jام باشد،

آنگاه:

محدودیت سرمایه درگیر در موجودی به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_j C_j \left(\text{حداکثر موجودی محصول } j \text{ ام}\right) \leq x \qquad (6\text{-}32)$$

از آنجا که در مدل مقدار سفارش اقتصادی، $Q_w = I_{max}$، بنابراین برای بررسی محدودیت باید رابطه زیر را بررسی نمود:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j Q_j \leq x \qquad (6\text{-}33)$$

✓ چنانچه محصولات از مدل مقدار سفارش اقتصادی پیروی نکنند، برای بررسی محدودیت باید I_{max} را در نامعادله جایگزین نماییم. به عنوان مثال در مدل EPQ بایستی $I_{max} = Q(1\text{-}D/P)$ را جایگزین نمود.

۱-۲-۳-۶ الگوریتم حل مدل با محدودیت سرمایه درگیر در موجودی

گام اول- ابتدا مساله را بدون درنظر گرفتن محدودیت حل می‌کنیم، اگر Q^*_j های بدست آمده محدودیت موردنظر را برقرار نمودند، این مقادیر بهینه هستند و محدودیت فعال نیست، در اینصورت با افزایش مقدار سرمایه درگیر در موجودی نمی‌توان متوسط هزینه‌های سالیانه را کاهش داد ولی اگر محدودیت فعال باشد به گام ۲ بروید.

گام ۲- مانند محدودیت فضا، از تابع لاگرانژ استفاده نموده. ابتدا مقدار β^* را از رابطه ۳۴-۶ محاسبه و سپس در رابطه ۳۵-۶ قرار دهید تا Q^*_j بدست آید:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j \sqrt{\frac{2D_jA_j}{i_jC_j + 2\beta^* C_j}} = x \qquad (6\text{-}34)$$

$$Q^*_j = \sqrt{\frac{2D_jA_j}{i_jC_j + 2\beta^* C_j}} \qquad (6\text{-}35)$$

Q^*_j را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_jA_j}{i_jC_j}} \times \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2\beta^* C_j}{i_jC_j}}} \qquad (6\text{-}36)$$

اگر نرخ هزینه نگهداری برای تمامی محصولات برابر باشد، آنگاه:

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_jA_j}{iC_j}} \times \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2\beta^* C_j}{iC_j}}} = \sqrt{\frac{2D_jA_j}{iC_j}} \times \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2\beta^*}{i}}} \qquad (6\text{-}37)$$

یعنی تمامی Q_jها به یک میزان کاهش می‌یابند (این نکته در حل تست‌ها در مورد محدودیت فضا نیز صادق است).

چند نکته:

- ✓ مانند مدل محدودیت فضا در صورتیکه بعد از محاسبات متوجه شویم که Q_{wj} ها محدودیت را برقرار نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مساله است که محدودیت سرمایه درگیر در موجودی را مساوی کند.
- ✓ در صورتیکه Q_{wj} ها محدودیت را برقرار نکنند، جواب‌های بدست آمده مانند مدل محدودیت فضا، الزاماً از Q_{wj} ها کمتر خواهند بود ($Q^*_j < Q_{wj}$).
- ✓ سرمایه درگیر در موجودی برابر با هزینه نگهداری برای کل قطعات است.

مثال ۵- فرض کنید در کارگاهی ۳ نوع محصول بصورت دسته‌ای تولید می‌شوند. مدیریت درنظر دارد که حداکثر سرمایه درگیر در موجودی از ۱۴۰۰۰ تومان بیشتر نباشد. چنانچه تقاضا برای این ۳ محصول ثابت و قطعی و کمبود موجودی مجاز نباشد، مطلوبست، محاسبه مقدار اقتصادی سفارش برای این محصولات با توجه به داده‌های جدول زیر.

محصول	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳
نرخ تقاضا (واحد در سال)	۱۰۰۰	۵۰۰	۲۰۰۰
قیمت واحد کالا	۲۰	۱۰۰	۵۰
هزینه سفارش‌دهی	۵۰	۷۵	۱۰۰
نرخ هزینه نگهداری (در سال)	۰/۲۰	۰/۲۰	۰/۲۰

پاسخ:

ابتدا مقادیر بهینه را بدون توجه به محدودیت سرمایه بدست می‌آوریم:

$$Q_{w1} = \sqrt{\frac{2(1000)(50)}{(0.2)(20)}} = 158, Q_{w2} = \sqrt{\frac{2(500)(75)}{(0.2)(100)}} = 61, Q_{w3} = \sqrt{\frac{2(2000)(100)}{(0.2)(50)}} = 200$$

اگر این مقادیر به جای Q_j در محدودیت قرار گیرند، آنگاه کل سرمایه مورد نیاز عبارتست از:

$\sum C_j Q_{wj} = 20(158)+ 100(51)+ 50(200)= 3150+ 6100+ 10000= 19260$ تومان

این مقدار از حداکثر سرمایه تخصیص داده شده به موجودی‌ها بیشتر است. بنابراین محدودیت فعال است و بایستی از ضریب لاگرانژ استفاده کرده و مقادیر سفارش را بدست آوریم:

$$\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\frac{2D_jA_jC_j}{i+2\beta^*}} = x \ \rightarrow \ \sqrt{\frac{1\times10^6}{0.10+\beta^*}}+\sqrt{\frac{3.75\times10^6}{0.10+\beta^*}}+\sqrt{\frac{10\times10^6}{0.10+\beta^*}} = 14000 \rightarrow \beta^* = 0.091$$

در نتیجه:

$$\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2\beta^*}{i}}} \approx 0.723 \ \rightarrow \ Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_jA_j}{iC_j}} \times \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2\beta^*}{i}}}$$

$$\rightarrow Q_1^* = 158(0723) = 114,\ Q_2^* = 61(0723) = 44,\ Q_3^* = 200(0723) = 144$$

هزینه سالیانه بدون درنظر گرفتن محدودیت برابر است با:

$$TC = \sum_{i=1}^{3}\sqrt{2D_jA_jiC_j} = 632 + 1225 + 2000 = 3857 \text{ تومان هزار/سال}$$

و در حالت وجود محدودیت سرمایه ۱۴۰۰۰ تومان:

$$Tc = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{D_j}{Q_j}A_j + i_jC_j\frac{Q_j}{2}\right] = 667 + 1292 + 2105 = 4064$$

۶-۳-۳ محدودیت تعداد دفعات سفارش

حالتی را درنظر بگیرید که بر روی تعداد دفعات سفارش محدودیت گذاشته شود. فرض کنید که نمی‌توان بیش از L سفارش در سال داشت. اگر:

D_j: تقاضای سالیانه محصول jام،

Q_j: مقدار هر بار سفارش محصول jام باشد، محدودیت تعداد دفعات سفارش ایجاب می‌کند که رابطه ۶-۳۸ برقرار باشد:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{D_j}{Q_j} \le L \qquad (6\text{-}38)$$

۶-۳-۳-۱ الگوریتم حل مدل با محدودیت تعداد دفعات سفارش

گام اول- ابتدا مساله را بدون درنظر گرفتن محدودیت حل نمایید، اگر Q^*_j های بدست آمده محدودیت مورد نظر را برقرار نماید، این مقادیر بهینه هستند و محدودیت فعال نیست ولی اگر محدودیت موردنظر برقرار نشد به گام ۲ بروید.

گام دوم- برای تعیین Q_j های بهینه از تابع لاگرانژ استفاده نمایید. ابتدا α^* را از رابطه ۶-۳۹ بدست آورید و سپس مقدار α^* را در رابطه ۶-۴۰ جایگزین نمایید تا Q^*_j بدست آید.

$$\sum\sqrt{\frac{h_jD_j}{2(A_j+\alpha^*)}} = L, \qquad \alpha^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2L}}\sum_j\sqrt{D_jh_j}\right)^2 \qquad (6\text{-}39)$$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_j(A_j+\alpha^*)}{h_j}} \qquad (6\text{-}40)$$

✓ از آنجا که مراحل حل ارائه شده طولانی و وقت‌گیر می‌باشد برای حل اکثر تست‌ها می‌توانید به این صورت عمل نمایید:

گام اول- ابتدا Q^*_j ها را از فرمول EOQ محاسبه نمایید و در محدودیت قرار دهید.

گام دوم- چنانچه محدودیت نقض شد، گزینه‌هایی را که $Q_j > Q^*_j$ هستند درنظر بگیرید.

۴-۳-۶ حالت خاص مدل محدودیت تعداد دفعات سفارش

چنانچه برای چند کالا، هزینه‌های ثابت سفارش‌دهی یکسان و هزینه نگهداری مساوی باشند، یعنی داشته باشیم:

$$\forall j:\ A_j = A \qquad h_j = h \tag{6-41}$$

و مقدار دفعات سفارش محدود و مشخص باشد:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{Q_j} = \sum_{j=1}^{n} N_j = n \tag{6-42}$$

$$\rightarrow Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_jA_j}{h_j}} = \sqrt{\frac{2A}{h}}\sqrt{D_j} = k\sqrt{D_j} \tag{6-43}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Q_j^* = k\sqrt{D_j} \\ Q_j^* = \dfrac{D_j}{N_j} \end{cases} \rightarrow k\sqrt{D_j} = \frac{D_j}{N_j} \quad \rightarrow k = \frac{\sqrt{D_j}}{N_j} \xrightarrow{\text{از طرفین} \sum \text{میگیریم}}$$

$$\begin{cases} k = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{D_j}}{\sum_{j=1}^{n} N_j} & (6-44) \\ Q_j^* = k\sqrt{D_j} & (6-45) \end{cases}$$

الگوریتم حل:

گام اول- چنانچه بخواهید مجموع تعداد سفارشات ثابت و مشخص باشد از رابطه ۴۴-۶ مقدار k را بدست آورید.

گام دوم- با استفاده از رابطه ۴۵-۶ و مقدار k بدست آمده در گام اول، Q^*_j را بدست آورید.

مثال ۶- اطلاعات مربوط به ۵ کالا در زیر آمده است، اگر بخواهیم مجموع تعداد دفعات سفارش در سال ثابت و برابر ۳۵ باشد، مقدار سفارش اقتصادی هر کالا را بدست آورید.

کالا	۱	۲	۳	۴	۵
مقدار مصرف سالیانه	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰	۱۲۰۰
هزینه ثابت	A	A	A	A	A
هزینه نگهداری	h	h	h	h	h

پاسخ:

ابتدا باید k را بدست آورد، بنابراین:

$$k = \frac{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{D_j}}{\sum_{j=1}^{n} N_j} = \frac{\sqrt{700} + \sqrt{800} + \sqrt{900} + \sqrt{1000} + \sqrt{1200}}{35} \approx 4.32$$

$$Q_j^* = k\sqrt{D_j} \rightarrow \{Q_1^* = 114.3,\ Q_2^* = 122.19, Q_3^* = 129.6, Q_4^* = 136.6, Q_5^* = 149.65$$

۶-۳-۵ حالت خاص مدل چندمحصولی با محدودیت تعداد دفعات سفارش و الزام سفارش همزمان

چنانچه در مدل چندمحصولی با محدودیت تعداد دفعات سفارش، الزام سفارش همزمان نیز بیان گردد، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام اول- ابتدا با استفاده از فرمول T_0 را محاسبه نموده $(T_0 = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}})$ و سپس از محدودیت $\frac{D_j}{Q_j} \le L$ استفاده کرده و قرار می‌دهیم، $T_1 = 1/L$. T^* طبق دستور زیر محاسبه می‌گردد:

$$T^* = \max\{T_0, T_1\}$$

گام دوم- با استفاده از رابطه $Q_j^* = T^* D_j$ مقدار سفارش اقتصادی را بدست می‌آوریم.

مثال ۷- مصرف سالیانه دو کالا در سال ۱۰۰۰۰ و ۱۲۰۰۰ واحد و هزینه نگهداری هریک ۲ تومان به ازاء واحد بوده و سفارش بیش از ۵ بار در سال مجاز نیست. این دو کالا باید باهم سفارش داده شوند و هزینه سفارش‌دهی برابر با ۱۰۰۰ تومان است. مقدار سفارش اقتصادی برای هر یک از این دو کالا را تعیین کنید.

پاسخ:

$$D_1 = 10000, \quad D_2 = 12000, \quad A = 1000, \quad h = 2, \;\; L \le 5$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}} = 0.2132 \;, \quad T_1 = \frac{1}{5} = 0.2 \;\rightarrow T^* = \max\{0.2132, 0.2\} = 0.2132$$

$$Q_j^* = T^* D_j \rightarrow \begin{cases} Q_1^* = 10000 \times 0.2132 = 2132 \\ Q_2^* = 12000 \times 0.2132 = 2558 \end{cases}$$

چند نکته:

- ✓ برای حل مسائلی که دارای محدودیت هستند، روش بهتر آن است که جواب‌ها را در محدودیت‌ها بررسی کرده و هر کدام صدق نمود، بهترین جواب است و درصورتیکه چند گزینه در محدودیت‌ها صدق کند، جوابی بهتر است که محدودیت‌ها را بیشتر به حالت تساوی نزدیک کند.
- ✓ در صورتیکه در یک مدل چندمحصولی بیش از یک محدودیت ارائه گردد، برای حل مدل باید یک محدودیت را درنظر بگیریم و جواب‌های مدل را بدست آوریم، چنانچه جواب حاصل محدودیت حذف شده را برقرار نماید، جواب مدل است. درغیراینصورت، گزینه‌ای جواب مدل است که محدودیت درنظر گفته شده را مساوی کند.

۶-۴ تمرین

۱. دو محصول ۱ و ۲ از یک فروشنده خریداری می‌شوند. این دو محصول همیشه باهم سفارش داده می‌شوند و هزینه ثابت سفارش‌دهی (دو محصول باهم) ۲۵۰۰ تومان است. تقاضای محصول ۱

برابر ۱۰۰۰۰ تن در سال و تقاضای محصول ۲ برابر ۲۰۰۰۰ تن در سال است. کمبود موجودی برای هیچ یک از این دو محصول جایز نیست. هزینه نگهداری به غیر از هزینه فضای انبار برای هر واحد محصول ۱ برابر ۱۰ تومان و برای هر واحد محصول ۲ برابر ۲۰ تومان در سال است (در سوالات داده شده فرض کنید هزینه فضای انبار صفر است). مطلوبست:

الف- محاسبه مقدار سفارش اقتصادی محصول ۱ و ۲.

ب- متوسط مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی دو محصول در سال در حالت بهینه.

ج- درحالتی که هزینه فضای انبار براساس حداکثر موجودی محاسبه گردد و این هزینه بدون توجه به نوع محصول برابر ۱۰ تومان در سال باشد، قسمت الف و ب را محاسبه کنید.

۲. در فروشگاهی حداکثر مساحت قابل استفاده برای انبار کردن دو محصول ۱ و ۲ برابر ۱۵۰ متر مربع است. علاوه بر این دو محصول در یک زمان و با یکدیگر سفارش داده می‌شوند و زمان تحویل هر دو یکی است. اطلاعات موردنیاز در جدول زیر آمده است:

محصول	۱	۲
مصرف سالیانه به واحد	۱۰۰۰۰	۱۲۰۰۰
هزینه هربار سفارش به تومان	۱۵۰	۳۵۰
هزینه نگهداری هر واحد در سال به تومان	۴	۵
سطح هر واحد محصول به متر مربع	۱/۱۰	۱/۱۲

مقدار اقتصادی هر بار سفارش از محصول ۱ و ۲ به ترتیب کدام یک از موارد زیر است:

الف- ۹۰۰ و ۷۵۰ ب- ۱۲۵۰ و ۹۰۰ ج- ۱۴۵۰ و ۱۱۵۰ د- ۱۶۰۰ و ۱۲۰۰

۳. تولیدکننده‌ای محصولی تولید می‌کند، از این نقطه‌نظر که محصول در انبار تحت تاثیر فاسد شدن می‌باشد، او ماکزیمم زمان دو هفته را برای نگهداری موجودی محصول خود تعیین کرده است. این تولیدکننده محصول خود را بصورت انباشته تولید می‌کند و فرآیند تولیدی به نحوی است که کل انباشته در یک لحظه تکمیل شده و به موجودی اضافه می‌شود. چنانچه، نرخ تقاضای سالیانه ۵۲۰۰ واحد، هزینه راه‌اندازی تولید ۴۰۰ تومان، نرخ هزینه نگهداری موجودی ۲۰٪، هزینه متغیر هر واحد محصول ۱۰۰ تومان و هیچ کمبود موجودی مجاز نباشد، اندازه انباشته اقتصادی را با توجه به محدودیت عمر نگهداری محصولات در انبار محاسبه کنید. سال را ۵۰ هفته درنظر بگیرید.

۴. با دستگاهی می‌توان محصول را با نرخ (سرعت) سالیانه ۱۰۰۰۰ واحد در سال تولید کرد. سرعت تقاضای سالیانه برای این محصول ۵۰۰۰ واحد است. هزینه آماده‌سازی هربار این دستگاه برای تولید برابر ۲۰۰۰ تومان، هزینه نگهداری هر واحد این محصول در سال ۱۰۰ تومان و هزینه مواد برای هر واحد محصول ۵۰ تومان است. اگر قرار باشد حداکثر سرمایه درگیر در موجودی این محصول برابر ۲۰۰۰ تومان باشد، آن‌گاه مقدار تولید بهینه این محصول را بدست آورید.