

فصل سوم

تعیین مقدار اقتصادی سفارش (E. O. Q)

- مدل های موجودی
- مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی (E. O. Q)
- نقطه سفارش
- خواص مدل
- آنالیز حساسیت خط مشی مطلوب و میزان تلورانس در مقادیر اقتصادی سفارش
- حالت خاص مدل سفارش اقتصادی
- تمرین

۱-۳ مدل‌های موجودی

در این فصل به روش‌های محاسباتی برای دستیابی به مقادیر بهینه هر بار سفارش کالا در سیستم‌های موجودی می‌پردازیم. هدف از این بخش آشنایی با مدل‌سازی مسائل گوناگون موجودی از طریق تجزیه و تحلیل مثال‌های گوناگون است. ابتدا عوامل سازنده فرضیات موجودی را بیان می‌کنیم تا با شناخت آن‌ها در هر مدل بتوان مدل‌های مختلف را از یکدیگر متمایز ساخت:

الف - تقاضا: مهمترین عامل در کنترل موجودی است و به انواع زیر تقسیم می‌گردند:

۱- **ساکن یا پویا (غیر ساکن)**، چنانچه مقدار تقاضا در طول افق برنامه‌ریزی تغییری نکند ساکن، و

چنانچه مقدار آن در طول زمان‌های مختلف تغییر کند، پویا نامیده می‌شود.

۲- **قطعی یا احتمالی**، در این فصل مجموعه‌ای از مدل‌های قطعی تک محصولی مورد بررسی قرار

می‌گیرد. با وجودی که تقاضا را نمی‌توان در اکثر موارد با صد در صد دقت پیش‌بینی نمود، فرض می‌شود که نرخ تقاضا معلوم و ثابت است. بعلاوه فرض می‌کنیم که مدت تحویل (L) و سایر پارامترهای سیستم مانند هزینه‌ها معلوم و ثابت هستند. لازم بذکر است که اگر این فرضیات عموماً غیرواقعی به نظر می‌رسند، ولی این مدل‌ها چارچوب ساده‌ای را برای معرفی روش‌های تجزیه و تحلیل مدل‌های پیچیده‌تر تهیه می‌کنند. علاوه بر این، این مدل‌ها تقریب خوبی برای بسیاری از سیستم‌های موجودی در جهان واقعی هستند.

۳- **تک محصولی یا چند محصولی**، در دنیای واقعی، اکثر سیستم‌های موجودی، به ذخیره بیش از

یک کالا می‌پردازند و ارتباطاتی در رابطه با یکدیگر دارند. در این حالت سیستم چندمحصولی است ولی چنانچه فقط برای یک نوع محصول سفارش خرید یا ساخت انجام گیرد، مدل، تک محصولی خواهد بود.

ب- کمبود: همانگونه که در فصول قبل تعریف گردید، تقاضایی است که در زمان مقرر به آن جواب نمی‌دهیم و می‌تواند مجاز و یا غیر مجاز باشد. در صورتیکه مجاز باشد به دو نوع پس‌افت و فروش از دست رفته تقسیم می‌شود.

ج- محدودیت: در مدل‌های موجودی ممکن است محدودیت‌های زیر وجود داشته باشد:

- محدودیت فضا

- محدودیت تعداد دفعات سفارش‌دهی

- محدودیت سرمایه درگیر موجودی

د- سفارش: مدل‌های موجودی با توجه به نرخ و چگونگی دریافت سفارش به دو نوع مدل‌های تولیدی و مدل‌های خرید تقسیم می‌شوند.

- **در مدل‌های خرید**، کل سفارش در یک لحظه به انبار تحویل داده می‌شود. بنابراین نرخ دریافت سفارش بی‌نهایت است.

- **در مدل‌های تولید**، سفارش به تدریج وارد انبار می‌گردد، در واقع نرخ دریافت سفارش یک عدد است.

ه- مدت زمان تحویل^۱ سفارش: مدت زمان بین لحظه سفارش تا لحظه دریافت اولین قطعه سفارش است و می‌تواند قطعی یا احتمالی باشد.

^۱. Lead Time

و- **قیمت کالا در طول افق برنامه‌ریزی:** قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی می‌تواند ثابت و یا متغیر باشد، مانند مدل‌های تورمی، حراج، تخفیف و ...

ز- **برنامه‌ریزی:** در مدل‌های موجودی می‌توان برای یک محصول و یا چند محصول به‌طور همزمان برنامه‌ریزی کرد.

در هر فصل از این کتاب به طور جداگانه به بررسی عوامل سازنده فرضیات مدل‌های موجودی خواهیم پرداخت. در شروع بحث در مورد سیستم‌های نگهداری موجودی مجموعه‌ای از مدل‌های ساده مورد مطالعه قرار می‌گیرند، که مقادیر مصرف کالا برای آینده با قطعیت^۱ معلوم بوده و در عین حال سرعت مصرف در طول افق برنامه‌ریزی ثابت می‌باشد^۲. فصل حاضر به مطالعه این مدل‌ها اختصاص یافته است.

۳-۲ مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی^۳ (E. O. Q)

در شروع این قسمت به مثال ساده‌ای می‌پردازیم و آن را با روش سعی و خطا حل می‌نماییم تا با ساختار، پارامترها و روابط مدل آشنا شویم.

مثال ۱- یکی از مواد شیمیایی مورد نیاز کارخانه‌ای به صورت دسته‌هایی ثابت (مقدار سفارش ثابت) از منبع تهیه برای مدت طولانی خریداری می‌شود. قیمت خرید هر واحد، برابر ۳ تومان است. سایر اطلاعات مربوط به این قلم موجودی به شرح زیر است:

هزینه ثابت هر بار سفارش‌دهی: ۶ تومان، مصرف سالیانه: ۶۰۰۰ واحد در سال، هزینه نگهداری هر واحد در سال: ۰/۲۵ قیمت خرید هر واحد. مقدار هر بار سفارش و هزینه کل سالیانه را حساب کنید.

پاسخ: با توجه به مطالب بیان شده در فصل دوم لازم است بدانیم سیاست مناسب برای سفارش این کالا چه خواهد بود؟ به عبارت دیگر این کالا را باید چند نوبت در سال سفارش بدهیم و مقدار هر بار سفارش کالا باید چه باشد؟

با توجه به اینکه کالا بصورت دسته‌هایی ثابت (مقدار سفارش ثابت) خریداری می‌شود، بنابراین در هر بار به مقدار ثابتی سفارش صادر می‌شود. از سوی دیگر در مثال فرض بر آن است که قیمت واحد کالا در طول افق برنامه‌ریزی، ثابت خواهد بود. بنابراین با هرگونه تغییری در سیاست سفارشات، جمع پولی که در ظرف یک سال بابت خرید کالا به فروشنده پرداخت می‌نماییم ثابت است. در اینصورت تغییرات در سیاست سفارشات بر هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی تاثیرگذار خواهد بود.

چنانچه کالا را بصورت یکجا و در ابتدای دوره سفارش دهیم (یک بار سفارش انجام گیرد)، در هزینه سفارشات صرفه‌جویی می‌شود ولی در مقابل هزینه نگهداری کالا به دلیل بالا بودن میانگین موجودی بسیار بالا خواهد بود. در مقابل، در صورتیکه این کالا را در دفعات زیاد در طول سال و هر بار به مقدار کم

^۱ . همانگونه که قبلاً توضیح داده شد، در دنیای واقعی تقریباً هیچگاه تقاضا با قطعیت قابل پیش‌بینی نیست و باید به بیان احتمالی توصیف شود. با این حال، مدل‌های قطعی مورد بحث هنوز مورد توجه هستند، زیرا چارچوب ساده‌ای برای معرفی روش‌های تجزیه و تحلیل که در سیستم‌های پیچیده‌تر به کار می‌روند، تهیه می‌نمایند. و از این رو، گاهی اوقات در بررسی جنبه‌های خاصی از مسائل دنیای واقعی مفید هستند. دیگر آنکه نتایج کسب شده از این مدل‌ها، حتی مواقعی که فرض تقاضای قطعی برداشته می‌شود از لحاظ کیفی، نوع صحیح رفتار را مشخص می‌کنند.

^۲ . ثابت بودن سرعت مصرف به این معنی است که در طول افق برنامه‌ریزی، مثلاً برای یک سال آینده که برنامه‌ریزی برای آن صورت می‌گیرد، فرض می‌شود که سرعت مصرف در تمام لحظات یکسان است.

^۳ . Economic Order Quantity

سفارش دهیم، در هزینه‌های نگهداری صرفه‌جویی می‌شود، ولی هزینه‌های سفارش‌دهی، به دلیل تعدد دفعات سفارش بسیار زیاد خواهد شد. به همین علت، لازم است مقدار اقتصادی سفارش این کالا را به نحوی بدست آوریم که به ازاء آن جمع هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری سالیانه کالا حداقل باشد.

برای حل مثال به روش سعی و خطا جدول ۱-۳ تهیه شده است. در ستون اول جدول مقادیر فرضی برای هربار سفارش، ستون دوم تعداد دفعات سفارش در سال، ستون سوم مقدار میانگین موجودی انبار، ستون چهارم هزینه سالیانه نگهداری، ستون پنجم هزینه سالیانه سفارش‌دهی و در ستون پایانی هزینه کل که از جمع هزینه‌های ستون چهارم و پنجم بدست می‌آید، آمده است.

به عنوان مثال، چنانچه مقدار سفارش در هر بار برابر ۶۰۰۰ واحد باشد، تعداد دفعات سفارش یکبار در سال بوده و بنابراین هزینه سفارش در سال برابر ۶ تومان خواهد بود. ولی هزینه نگهداری بسیار زیاد و مساوی ۲۲۵۰ تومان می‌باشد. هر چه تعداد دفعات سفارش در سال بیشتر شود، هزینه سفارش‌دهی سالیانه افزایش و بالعکس هزینه نگهداری سالیانه کاهش می‌یابد. در جدول ۱-۳ هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی برای خط مشی‌های مختلف داده شده است. در بین خط مشی‌های مختلف راه حل $Q=300$ واحد کمترین هزینه را دارد.

جدول ۱-۳ هزینه‌های سیستم به ازای مقادیر مختلف سفارش مثال ۱

هزینه سالیانه (تومان)	هزینه سالیانه سفارش‌دهی (تومان) $A(D/Q)$	هزینه سالیانه نگهداری (تومان) $h(Q/2)$	متوسط موجودی $(Q/2)$	تعداد سفارشات در سال D/Q	مقدار سفارش Q
۲۲۵۶	۶	۲۲۵۰	۳۰۰۰	۱	۶۰۰۰
۱۱۳۷	۱۲	۱۱۲۵	۱۵۰۰	۲	۳۰۰۰
۴۱۱	۳۶	۳۷۵	۵۰۰	۶	۱۰۰۰
۲۵۹/۵	۷۲	۱۸۷/۵	۲۵۰	۱۲	۵۰۰
۲۴۰	۹۰	۱۵۰	۲۰۰	۱۵	۴۰۰
۲۳۲/۵	۱۲۰	۱۱۲/۵	۱۵۰	۲۰	۳۰۰
۲۳۷/۵	۱۴۴	۹۳/۷۵	۱۲۵	۲۴	۲۵۰
۲۹۶/۲۵	۲۴۰	۵۶/۲۵	۷۵	۴۰	۱۵۰

در قسمت بعد نحوه محاسبه دقیق مقدار اقتصادی سفارش به روش تحلیلی ارائه خواهد گردید.

۱-۲-۳ ساخت فرمول مقدار سفارش اقتصادی

اصولاً در طراحی مدل‌ها و بدست آوردن فرمول‌ها ابتدا ساده‌ترین روابط موجود در نظر گرفته می‌شود. در مدل کلاسیک مقدار سفارش اقتصادی فرضیات و علامات اختصاری زیر در نظر گرفته می‌شوند:

الف - فرضیات و پارامترهای مدل:

D - نرخ تقاضا، تعداد واحدهای تقاضا در سال، معلوم و ثابت (مستقل از زمان) است.

- مقدار سفارش یکباره به صورت یکجا می‌رسد، یعنی هرگز اتفاق نمی‌افتد که مقدار سفارش به دو بخش تقسیم شود که قسمتی در یک زمان و قسمت بعدی در زمانی دیگر برسد (سفارش در مدل EOQ آنی و بنابراین نرخ تولید (P) بسیار زیاد (∞) می‌باشد).
- محصول را می‌توان برای مدت‌های طولانی (بی‌نهایت) نگهداری نمود و هرگز متروک‌شدنی نیست. به عبارت دیگر جنس می‌تواند به طور نامعین انبار شده و هیچ‌گاه اسقاط نگردد.
- L: مدت تحویل، فاصله زمانی از موقع سفارش دادن تا زمانی که محصول به انبار تحویل داده می‌شود، ثابت و مستقل از تقاضا و مقدار سفارش است.
- h: هزینه نگهداری یک واحد کالا در سال^۱، معمولاً به صورت $h = iC$ بیان می‌شود، که در آن i نرخ هزینه نگهداری^۲ است.
- کمبود موجودی در هیچ زمانی وجود ندارد، یعنی تقاضای تمام مشتری‌ها بدون تاخیر برآورده می‌شود (π و $\hat{\pi}$: هزینه‌های کسری واحد کالا در مدل EOQ بسیار زیاد (∞) می‌باشند). این فرض کاملاً معقول است زیرا تقاضا قطعی است و زمان تهیه کالا ثابت است.
- محدودیت فضا، تعداد سفارشات و سرمایه وجود ندارد.
- A: هزینه ثابت انجام یک بار سفارش^۳،
- C: ارزش هر واحد کالا^۴ که ثابت و به مقدار سفارش بستگی ندارد،
- i: ضریب هزینه نگهداری کالا،

ب- متغیرهای مدل:

Q: مقدار هربار سفارش^۵،

r: نقطه سفارش برحسب موقعیت موجودی. بدین معنی که هر وقت در نمودار موقعیت موجودی، موجودی محصول برابر مقدار r شود، زمان سفارش است.

r_h : نقطه سفارش برحسب موجودی خالص یا موجودی در دست. بدین معنی که هر وقت در نمودار موجودی خالص موجودی محصول برابر مقدار r_h شود، زمان سفارش است.

متغیر دیگری که می‌توان آن را از بقیه متغیرها بدست آورد، T است:

T: فاصله بین دو سفارش متوالی یا فاصله بین رسیدن دو سفارش متوالی یا مدت زمانی یک دوره.

N: تعداد سفارشات در هر دوره،

ج- هزینه‌های مدل:

TC_s : کل هزینه‌های انجام سفارشات در سال^۶،

TC_h : کل هزینه‌های نگهداری موجودی در سال^۷،

TC (که در بعضی کتاب‌ها با نماد $K(Q)$ نشان داده می‌شود): مجموع هزینه‌ها در سال^۸.

^۱. Holding Cost

^۲. Inventory Carrying Cost Rate

^۳. Set up Cost

^۴. Cost Per Unit

^۵. Order Quantity

^۶. Total Set up Cost

^۷. Total Holding Cost

^۸. Total Cost

ابتدا مناسب است تصور شود که مقدار تقاضا شده در زمان t ، تابع پیوسته‌ای از t است، و از این حقیقت که یک مقدار صحیح و کامل از اقلام باید تقاضا شوند صرفنظر می‌کنیم. در ادامه فصل به بررسی مدل‌هایی که تعداد اقلام تقاضا شده صحیح هستند خواهد آمد. همانگونه که گفته شد، مساله اصلی در هر سیستم موجودی تعیین خط مشی آن، یعنی مشخص کردن مقدار و زمان سفارش است. بنابراین باید خط مشی مطلوب تعیین گردد.

خط مشی مطلوب: خط مشی است که حداکثر استفاده از آن حاصل شود. بنابراین خط مشی مطلوب آن است که هزینه سالیانه/ش کمیینه باشد.

با توجه به اینکه مقدار سفارش، Q ، ثابت است، بنابراین فاصله زمانی بین هر دو بار سفارش متوالی، T ، موسوم به دور^۱ سفارش نیز ثابت و به صورت رابطه ۳-۱ است (شکل ۳-۱ را ببینید):

$$D = \tan \alpha = Q/T \rightarrow T = \frac{Q}{D} \quad (3-1)$$

هزینه‌های مناسب با توجه به هزینه‌هایی که قبلاً تعریف شدند، عبارتند از:

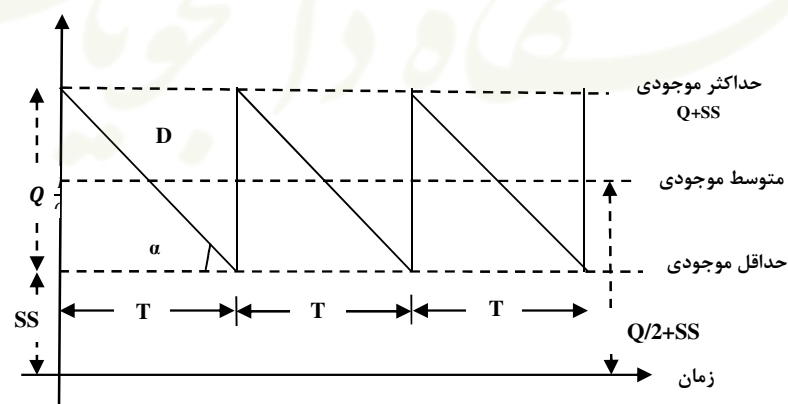
- (۱) هزینه واحد محصول،
- (۲) هزینه سفارش‌دهی،
- (۳) هزینه نگهداری موجودی.

۳-۲-۲ کل هزینه سالیانه سیستم

هزینه‌های یک سیستم موجودی برابر با جمع هزینه‌های نگهداری، کمبود و تدارک مواد است. از آنجا که در مدل EOQ کلاسیک کمبود جایز نمی‌باشد، هزینه‌های کسری برابر صفر خواهد بود. هزینه تدارک مواد نیز به دو قسمت هزینه سفارش‌دهی و هزینه خرید تقسیم می‌گردد. بنابراین:

هزینه خرید + هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی = هزینه یک دوره

موقعیت موجودی



شکل ۳-۱. نمودار موقعیت موجودی بر حسب زمان در مدل کلاسیک مقدار اقتصادی سفارش

^۱. Cycle

الف - هزینه خرید در دوره:

چون هربار به اندازه Q سفارش می‌دهیم و هزینه هر واحد C می‌باشد، بنابراین:

$$CQ = \text{هزینه خرید در دوره} \quad (3-2)$$
ب - هزینه سفارش‌دهی در دوره:

هزینه هربار سفارش A می‌باشد، بنابراین:

$$A = \text{هزینه سفارش‌دهی در دوره} \quad (3-3)$$
ج - هزینه نگهداری موجودی:

SS ، حداقل موجودی = SS ، متوسط موجودی = $\frac{(Q+SS)+SS}{2} = \frac{Q}{2} + SS$ ، حداکثر موجودی = $Q + SS$

در صورتی که حداقل موجودی برابر SS باشد، آنوقت هربار که مقدار سفارش Q می‌رسد، متوسط موجودی در دوره با توجه به شکل ۳-۱ برابر است با $T(Q/2 + SS)$ بنابراین هزینه نگهداری در دوره برابر است با:

$$hT \left(\frac{Q}{2} + SS \right) = iCT \left(\frac{Q}{2} + SS \right) \quad (3-4)$$

با توجه به شکل ۳-۱ متوسط موجودی از سطح زیر نمودار نیز قابل محاسبه می‌باشد:

$$\frac{1}{2}QT + SST = \text{مساحت مستطیل} + \text{مساحت مثلث} = \text{مساحت زیر منحنی}$$

براساس آنچه در نمودار موجودی خالص مشاهده گردید، هزینه یک دوره به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$A + hT \left(\frac{Q}{2} + SS \right) + CQ = \text{هزینه یک دوره}$$

N : متوسط تعداد دوره‌ها در سال یا متوسط تعداد دفعات سفارش ($N = 1/T$)

هزینه یک دوره $\times N$ = متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی

$$= A \frac{D}{Q} + h \left(\frac{Q}{2} + SS \right) + CD \quad (3-5)$$

هزینه خرید محصول در سال + هزینه نگهداری موجودی در سال + هزینه تعداد سفارشات در سال TC

از آنجائیکه مقدار مصرف در هر دوره ثابت بوده و قیمت هر واحد کالا نیز به ازای هر مقدار سفارش ثابت در نظر گرفته شده است، بنابراین قیمت خرید کالا در هزینه‌ها به عنوان یک مقدار ثابت بوده و قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد. بعلاوه، با وجودی که مقدار حداقل موجودی، SS ، بستگی به خط مشی دارد، ولی از آنجا که این مقدار مستقل از Q است، در نتیجه برای تعیین خط مشی مطلوب کافی است که رابطه ۳-۶ کمینه شود (شکل ۳-۲ هزینه‌های سیستم موجودی را نشان می‌دهد):

$$TC = \frac{DA}{Q} + h \frac{Q}{2} \quad (3-6)$$

برای یافتن مقدار سفارش اقتصادی باید از TC نسبت به Q مشتق گرفت و آن را برابر صفر قرار داده و Q موردنظر را یافت.

$$TC = \left(\frac{Q}{2} + SS \right) h + \frac{A.D}{Q} + DC$$

$$\frac{\partial Tc}{\partial Q} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}h - \frac{A \cdot D}{Q^2} + 0 = 0$$

$$\rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \quad (3-7)$$

فرمول (۳-۷) به نام فرمول ویلسون^۱ معروف است، اقتصادی‌ترین مقدار سفارش را محاسبه می‌کند، که در آن هزینه‌های نگهداری، سفارش و خرید به حداقل می‌رسد. در مثال ۱ مقدار اقتصادی سفارش برابر است با:

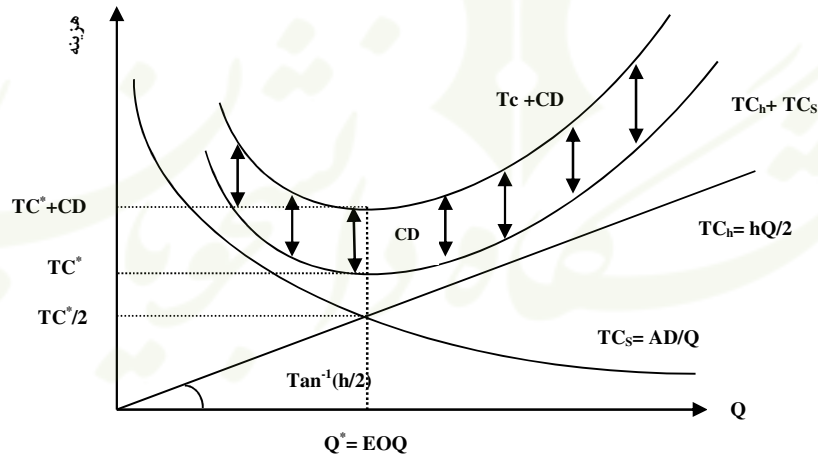
$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 6000 \times 6}{0.25 \times 3}} \approx 310$$

همانگونه که مشاهده می‌نمایید، با استفاده از روش سعی و خطا مقدار ۳۰۰ بدست آمد که به این مقدار نزدیک است. سایر روابط به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$N^* = \frac{D}{Q^*} = \sqrt{\frac{Dh}{2A}}, \quad T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}, \quad Tc^* = \sqrt{2ADh} + hSS$$

و در حالتیکه ذخیره اطمینان برابر صفر باشد، هزینه کل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Tc^* = \sqrt{2ADh} = hQ^* = \frac{2AD}{Q^*}$$



شکل ۳-۲ هزینه‌های سیستم موجودی مدل کلاسیک EOQ

مثال ۲- اگر تقاضا برای محصولی ۸۰۰ واحد در سال و هزینه هر بار سفارش معادل ۲۰۰ ریال باشد، با در نظر گرفتن هزینه نگهداری هر واحد در سال معادل ۱۰ ریال، مقدار سفارش اقتصادی را بدست آورید.

پاسخ:

^۱ . اقتصاد پیشرفته در زمینه کنترل موجودی از زمانی آغاز گردید که R. H. Wilson فرمول معروف خود را که امروزه به نام مقدار سفارش اقتصادی شناخته می‌شود، ارائه نمود.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 800 \times 200}{10}} = 178.8$$

- مثال ۳-** مصرف قطعه‌ای در یک کارخانه تولیدی ۲۵۲۰ واحد در سال می‌باشد. کارخانه مزبور تصمیم دارد این قطعه را نیز تولید بنماید. کارخانه هزینه‌های ذیل را جهت تولید این قطعه برآورده نموده است:
- هزینه‌های تنظیم ماشین‌آلات برابر ۷۸۷۵ ریال،
 - قیمت تمام شده هر واحد کالا ۴۰۰،
 - هزینه‌های نگهداری برابر ۲۵ درصد قیمت کالا در سال.

مطلوبست:

الف- مقدار سفارش اقتصادی جهت ساخت این قطعه.

ب- تعداد دفعات سفارش در سال.

ج- کل هزینه‌ها در سال بدون در نظر گرفتن قیمت کالا.

پاسخ:

الف-

$$h = ic = 0.25 \times 400 = 100, \quad Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 2520 \times 7875}{100}} = 630,$$

ب-

$$N^* = \frac{D}{Q^*} = \sqrt{\frac{Dh}{2A}} = \frac{2520}{630} = 4 \text{ مرتبه در سال}$$

ج-

$$Tc^* = \sqrt{2ADh} = 63000 \text{ ریال در سال}$$

۳-۳ نقطه سفارش

همانگونه که بیان شد، در برنامه‌ریزی تولید و کنترل موجودی همواره با دو سوال روبرو هستیم:

۱. چه مقدار سفارش دهیم (یا هر بار چقدر تولید کنیم)؟

۲. چه وقت سفارش دهیم؟

در قسمت‌های قبل به این سوال که چه مقدار سفارش دهیم پاسخ دادیم، در این قسمت به سوال دوم، یعنی چه وقت سفارش دهیم، پاسخ می‌دهیم ولی قبل از آن لازم است مفاهیم موردنظر تعریف گردند:

تعریف نقطه سفارش - بدین معنی که هر وقت در نمودار موقعیت موجودی، موجودی محصول برابر مقدار r شود، زمان سفارش است.

تعریف فاصله زمانی تحویل - فاصله زمانی بین تاریخ صدور سفارش تا تاریخ دریافت کالا در انبار را "فاصله زمانی تحویل" می‌گوئیم.

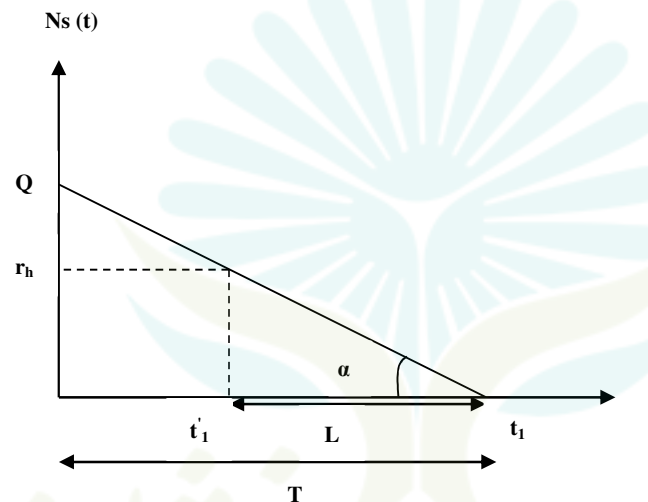
در فاصله زمانی تحویل که آن را با L نشان می‌دهیم به طور معمول مقداری کالا از انبار خارج خواهد شد و بنابراین مقدار موجودی از نقطه سفارش پایین‌تر خواهد رفت. بدیهی است، گرچه بالا بودن نقطه سفارش باعث کاهش احتمال مواجهه با کمبود خواهد شد، ولی از سوی دیگر به علت افزایش سطح موجودی در انبار، باعث افزایش هزینه‌های نگهداری کالا خواهد گردید. از سوی دیگر، پایین بودن نقطه

سفارش هزینه مواجهه با کمبود را افزایش خواهد داد. هدف از مطالعات این قسمت، دستیابی به مقادیر بهینه سطح موجودی در لحظه صدور سفارش (نقطه بهینه سفارش) می‌باشد.

از آنجا که فاصله بین هر دو سفارش متوالی ثابت و برابر T می‌باشد، حال چنانچه دوره سفارش از مدت زمان تحویل کوچکتر یا بزرگتر باشد، روابط موجود برای محاسبه نقطه سفارش متفاوت خواهند بود. به همین علت، برای یافتن r_h^* و r_h^* دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

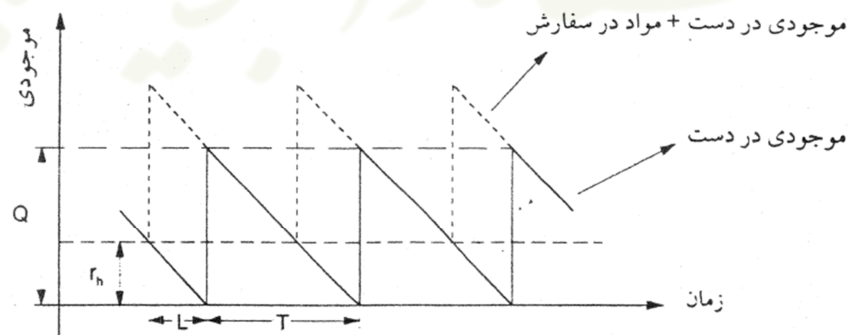
حالت اول: $L < T$ (شکل ۳-۳)

$$\tan \alpha = \frac{r_h}{L} \rightarrow r_h^* = DL \quad (3-8)$$



شکل ۳-۳ محاسبه نقطه سفارش مجدد در مدل EOQ زمانی که $L < T$

در این حالت تعداد سفارش در راه یک لحظه قبل از t'_1 (زمان سفارش) برابر صفر و لحظه‌ای بعد از آن برابر Q^* است. بنابراین موقعیت موجودی آن به صورت شکل ۳-۴ خواهد بود:



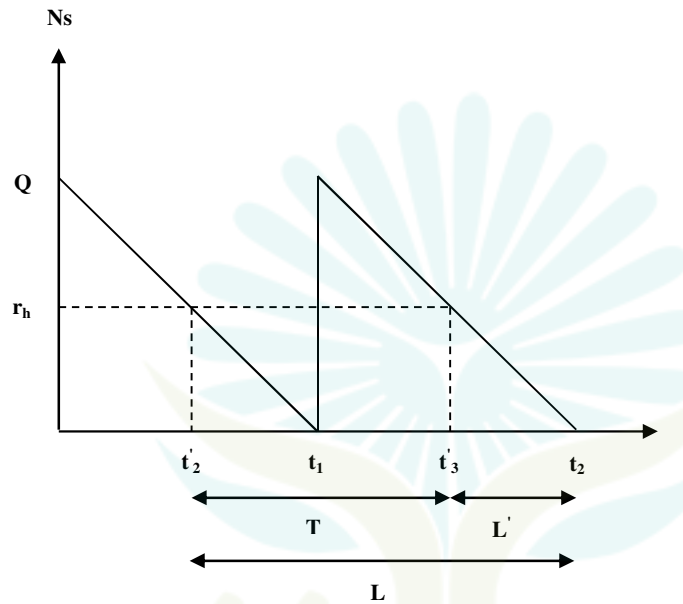
شکل ۳-۴ نمودار موقعیت موجودی در حالتیکه $L < T$

حالت دوم: $L > T$ (شکل ۳-۵)

در این حالت نمی‌توان مانند حالت قبل عمل کرد، بنابراین L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

\hat{L} : فاصله زمانی بین انجام سفارش تا رسیدن اولین (نزدیکترین) سفارش که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\hat{L} &= L - mT, m = \left\lfloor \frac{L}{T} \right\rfloor \\ \tan \alpha = D &= \frac{r_h}{\hat{L}} \rightarrow r_h^* = D\hat{L} = D(L - mT) = DL - mDT \rightarrow \\ r_h^* &= DL - mQ^* \quad (3-9)\end{aligned}$$



شکل ۳-۵ محاسبه نقطه سفارش مجدد در مدل EOQ زمانی که $L > T$

در این حالت مقدار سفارش در راه لحظه‌ای قبل از t' برابر m و لحظه‌ای بعد از آن $(m+1)$ است (که در آن $m = \left\lfloor \frac{L}{T} \right\rfloor$ ، یعنی m بزرگترین عدد صحیح است که مساوی یا کوچکتر از L/T تعداد متوسط سفارش در راه است) می‌باشد. بنابراین نمودار موقعیت موجودی آن به صورت شکل ۳-۶ خواهد بود، در شکل ۳-۶ مقدار سفارش در نقطه سفارش برابر mQ می‌باشد، بنابراین:

$$r^* = r_h^* + mQ^* = DL - mQ^* + mQ^* = DL \quad (3-10)$$

بنابراین برای خط مشی مطلوب مدل EOQ، نقطه سفارش موقعی است که:

$$\begin{cases} r_h^* = DL & \text{برای } L \leq T \\ r_h^* = DL - mQ^* & \text{برای } L > T \end{cases} \quad (3-11)$$



- هزینه متغیر به ازاء هر کیلو وزن بسته پستی: ۲۰۰ ریال.
 قیمت تراشه‌ها به ازاء هر کیلو وزن، (شامل ۵۰۰ عدد) ۵۰۰۰۰۰ ریال است، و شرکت بیمه نیز به ازاء هر کیلو وزن، مبلغ ۴۰۰۰ ریال بابت حمل این کالا دریافت می‌نماید. هزینه‌های اداری بابت هربار سفارش‌دهی این کالا ۱۲۰۰۰۰ ریال برآورد شده است. در این شرایط قیمت هر واحد کالا، تحویل انبار کارخانه خریدار و هزینه‌های هربار سفارش‌دهی این کالا، چه خواهد بود؟

پاسخ:

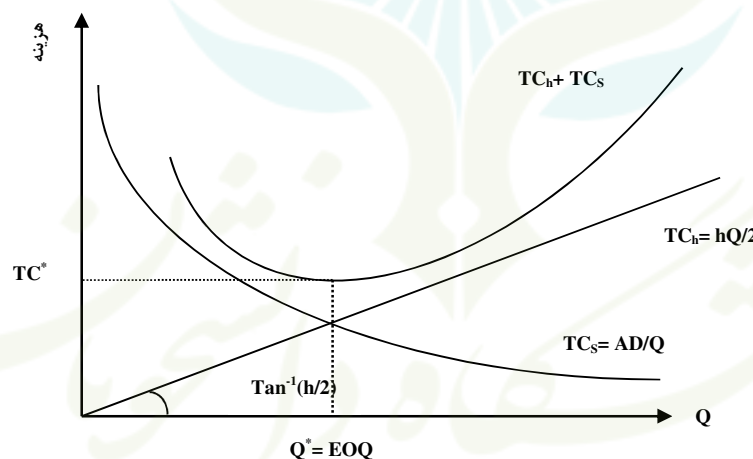
آن بخش از هزینه‌ها که در هر بار سفارش‌دهی، بستگی به مقدار سفارش ندارند، در محاسبات مقدار اقتصادی سفارش، جزء هزینه‌های سفارش‌دهی منظور می‌شوند. در نتیجه:

ریال $128000 = 120000 + 8000 =$ هزینه‌های سفارش‌دهی

ریال $1208 = 120000/500 + 4000/500 + 200 + 500000/500 =$ هزینه‌های مربوط به قیمت واحد کالا

۴-۳ خواص مدل

۱. باتوجه به رابطه هزینه سالانه $\frac{Q}{2} \cdot h + \frac{A \cdot D}{Q}$ این هزینه از هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالانه تشکیل شده است. با افزایش Q هزینه نگهداری افزایش و هزینه سفارش کاهش می‌یابد. (شکل ۷-۳).



شکل ۷-۳ هزینه‌های موجودی‌ها در مقابل مقدار هر بار سفارش

۲. شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه به ترتیب برای هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالانه معادل $\frac{h}{2}$ و $-\frac{h}{2}$ است. به عبارت دیگر Q^* در نقطه‌ای اتفاق می‌افتد که شیب منحنی هزینه سفارش‌دهی، منفی شیب منحنی هزینه نگهداری موجودی باشد.

۳. رابطه بین هزینه سفارش‌دهی سالانه و هزینه نگهداری سالانه در صورتی که بیشتر یا کمتر از سفارش اقتصادی، سفارش دهیم به صورت زیر است:

- اگر $Q > Q^*$ آنگاه: هزینه سفارش‌دهی $>$ هزینه نگهداری
- اگر $Q = Q^*$ آنگاه: هزینه سفارش‌دهی = هزینه نگهداری
- اگر $Q < Q^*$ آنگاه: هزینه سفارش‌دهی $<$ هزینه نگهداری

۴. با توجه به خط مشی مطلوب، در حالتی که ذخیره اطمینان صفر باشد، متوسط موجودی برابر است با $Q^*/2$ و یا:

$$\frac{Q^*}{2} = \sqrt{\frac{AD}{2iC}} = W\sqrt{D} = Z\sqrt{\frac{1}{C}} \quad (3-12)$$

که در آن $W = \sqrt{\frac{A}{2iC}}$ و $Z = \sqrt{\frac{AD}{2i}}$ می‌باشند. بنابراین متوسط موجودی (و حداکثر آن) بطور خطی با جذر مقدار مصرف تغییر می‌نماید. به علاوه متوسط موجودی متناسب با عکس جذر قیمت واحد محصول تغییر می‌نماید. بنابراین، متوسط موجودی برای محصول‌های گرانتر، در صورتی که سایر پارامترهای دیگر ثابت باشند، کمتر از متوسط موجودی برای محصول‌های ارزانتر است.

۵. روابط زیر برای موقعیت موجودی $y(t)$ برقرار است:

$$r^* \leq y(t) \leq r^* + Q^* \quad (3-13)$$

$$DL \leq y(t) \leq DL + DT^* \quad (3-14)$$

همچنین برای موجودی خالص $NS(t)$ داریم:

$$0 \leq NS(t) \leq Q^* \quad (3-15)$$

۶. در مدل‌های EOQ ، r_h^* می‌تواند برابر صفر گردد ولی نمی‌تواند برابر Q^* شود.

$$0 \leq r_h^* < Q^* \quad (3-16)$$

۷. اگر مدت زمان تحویل سفارش مضرب صحیحی از T باشد ($L=0, L=mT$)، آنگاه r_h^* برابر صفر است.

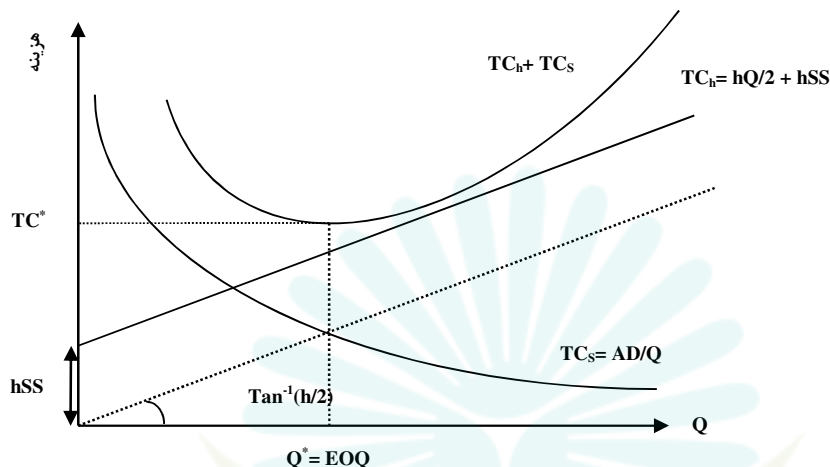
۸. در مواردی که زمان تحویل کمتر از یک سیکل باشد، هیچگاه بیش از یک سفارش در راه وجود نخواهد داشت. علاوه بر این سفارش در راهی بلافاصله قبل از انجام یک سفارش وجود نخواهد داشت (یعنی، بمحض اینکه نقطه سفارش مجدد دریافت می‌گردد). از سوی دیگر، اگر زمان تحویل طولانی‌تر از یک سیکل باشد، همیشه حداقل یک سفارش در راه وجود خواهد داشت. به طور کلی، در مدل EOQ در زمان‌های قبل از زمان سفارش مقدار سفارش در راه معادل mQ^* و زمان‌های پس از سفارش، مقدار آن $(m+1)Q^*$ است. به طور متوسط مقدار سفارش در راه معادل DL است. همچنین متوسط تعداد محموله‌های در سفارش یا متوسط تعداد سفارشی که به دست ما نرسیده برابر $L/T^* = DL/Q^*$ است.

۹. با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینه متغیر سالیانه به صورت زیر تغییر می‌کند:

Q^*	$Tc(Q^*)$	
افزایش	افزایش	افزایش A
افزایش	افزایش	افزایش D
کاهش	افزایش	افزایش h
کاهش	افزایش	افزایش i
کاهش	افزایش	افزایش C
تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند	افزایش L

۱۰. در صورتیکه هزینه‌های مربوط به نگهداری ذخیره اطمینان (hSS) را در کل هزینه نگهداری منظور ننمائیم، در نقطه اقتصادی سفارش، همواره مقادیر کل هزینه سفارش‌دهی و کل هزینه نگهداری با یکدیگر برابر می‌شوند. به عبارت دیگر، در نقطه مینیمم تابع هزینه کل در محل تلاقی

TC_h و TC_s قرار می‌گیرد. در صورت وجود ذخیره اطمینان، خط TC_h با همان شیب h ولی به مقدار hSS بالاتر می‌رود. در این حالت، نقطه مینیمم هزینه کل، در محل تلاقی TC_s با خط فرضی که به موازات TC_h از نقطه مبدا مختصات می‌گذرد قرار خواهد گرفت (شکل ۳-۸ را ببینید).



شکل ۳-۸ هزینه‌های موجودی‌ها در مقابل مقدار هر بار سفارش با در نظر گرفتن ذخیره اطمینان

۱۱. اگر h_1 هزینه نگهداری هر واحد موجودی در سال براساس متوسط موجودی و h_2 هزینه نگهداری هر واحد در سال براساس ماکزیمم موجودی باشد، در محاسبه فرمول‌های مدل EOQ به جای مقدار h مقدار $h_1 + 2h_2$ جایگزین می‌گردد:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h_1 + 2h_2}}, \quad TC^* = \sqrt{2AD(h_1 + 2h_2)} + (h_1 + 2h_2)SS \quad (3-17)$$

۳-۵ آنالیز حساسیت خط‌مشی مطلوب و میزان تلورانس در مقادیر اقتصادی سفارش

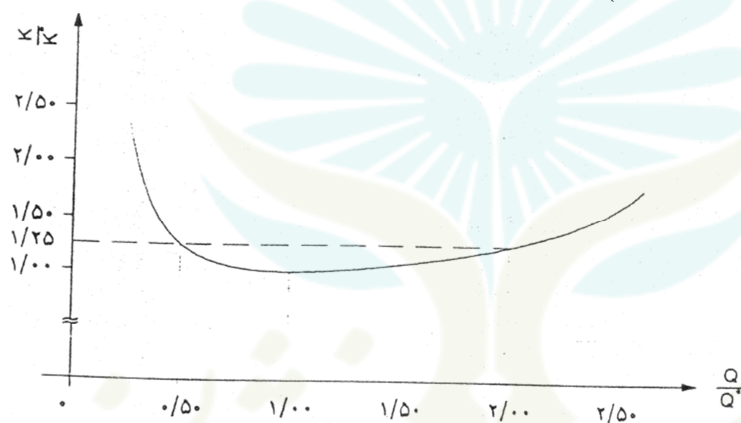
مقادیر اقتصادی سفارش، چه در مورد سفارش‌های خرید و چه در مورد سفارش‌های تولید و ساخت، آن‌گونه که از طریق فرمول به دست می‌آیند، در عمل نمی‌تواند دقیقاً اجرا شوند. در موارد زیاد در سفارش‌های خرید، مقادیر در در واحدهای مشخصی (به عنوان مثال، دوجین) قابل تحویل هستند. بنابراین لازم خواهد شد که مقدار سفارش مضرب صحیحی از این واحدها باشد. در مورد سفارش ساخت کالا در داخل سیستم تولید نیز این امکان وجود دارد که مقدار واقعی هر بار تولید کالا، نسبت به آنچه که براساس فرمول EOQ به دست آمده است تغییر کند. علاوه بر این، مردود شدن بخشی از کالای ساخته شده توسط بخش کنترل کیفیت، مواجهه با کمبود مواد اولیه، خرابی ماشین‌های تولید در فاصله زمانی که باید کالا تولید شود، یا بسیاری از عوامل دیگر می‌توانند مقدار واقعی تولید را نسبت به آنچه از طریق EOQ سفارش شده است، تغییر دهند. در نتیجه ارقام مورد استفاده در فرمول EOQ همواره با تقریب همراه هستند. این میزان نوسان در مقدار واقعی نسبت به مقدار اقتصادی سفارش را تلورانس مقدار اقتصادی سفارش می‌نامیم. همانگونه که در خواص مدل بیان شد، در صورتیکه سفارش بهینه مقدار EOQ باشد، مجموع هزینه‌ها در

حداقل ممکن خواهد بود. و در صورتیکه مقدار واقعی عمل شده سفارش نسبت به EOQ در هر یک از دو سمت تغییر نماید، به هزینه‌ها افزوده خواهد شد. مقایسه Tc^* با هزینه Tc ، وقتی بجای Q^* مقدار دیگری (Q) بکار رود، نتیجه جالب زیر را می‌دهد:

$$\frac{Tc}{Tc^*} = \frac{\left(\frac{DA}{Q} + iC\frac{Q}{2}\right)}{\sqrt{2DAiC}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\frac{2DA}{iC}}}{Q} + \frac{Q}{\sqrt{\frac{2DA}{iC}}} \right]$$

$$\frac{Tc}{Tc^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^*}{Q} + \frac{Q}{Q^*} \right) \quad (3-18)$$

توجه کنید که این رابطه کاملاً مستقل از پارامترهای سیستم (یعنی A، D، i، C) می‌باشد. این رابطه در شکل (۳-۹) رسم شده است.^۱ ملاحظه می‌شود که در نزدیکی نقطه مطلوب ($Q=Q^*$)، منحنی نسبتاً پهن می‌باشد. اگر مقدار Q دو برابر Q^* یا نصف آن باشد، مقدار Tc فقط ۲۵ درصد از مقدار مطلوب آن یعنی Tc^* بیشتر است. یا اگر Q به اندازه ۴۰ درصد بیشتر از Q^* باشد مقدار Tc فقط در حدود ۶ درصد از Tc^* بیشتر خواهد بود.^۲ ($Tc = 1.057 Tc^*$).



شکل ۳-۹ مقایسه هزینه‌ها در حالتی که مقدار سفارش برابر با EOQ نباشد.

حال چنانچه نسبت مقادیر $\frac{Tc}{Tc^*}$ را با α نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\alpha = \frac{\text{هزینه عملی موجودیها}}{\text{حداقل هزینه موجودیها}} = \frac{Tc}{Tc^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^*}{Q} + \frac{Q}{Q^*} \right) \quad (3-19)$$

مدیریت‌های واحدهای صنعتی با توجه به تاثیرگذاری پارامترهای تغییردهنده و نوسان‌دهنده در تولید (و یا در سفارش‌های خرید)، عدد α را تعیین می‌نمایند. به عنوان مثال، در صورتیکه با اضافه هزینه‌ای برابر با ۵ درصد نسبت به هزینه ایده‌آل موافقت شود، آنگاه مقدار α برابر با ۱/۰۵ خواهد بود. در این شرایط لازم است مقادیر Q به نحوی تعیین شوند که مقدار واقعی هزینه از حاصلضرب حداقل هزینه در مقدار α تجاوز ننماید. حال چنانچه $\frac{Q}{Q^*}$ را با β نشان دهیم، با جایگذاری در رابطه (۳-۱۹) خواهیم داشت:

^۱ برای مقایسه تغییرات کل هزینه سالیانه $(Tc(Q) + CD)$ نمی‌توان مانند هزینه متغیر سالیانه $Tc(Q)$ رابطه‌ای یافت، تنها می‌توان حدود تغییر را از نامساوی زیر بدست آورد.

$$1 \leq \frac{Tc(Q) + CD}{Tc(Q^*) + CD} < \frac{Tc(Q)}{Tc(Q^*)}$$

^۲ با توجه به حالت نسبتاً مسطح منحنی هزینه کل (Tc) در اطراف نقاط بهینه، حتی در صورت نوسان‌های زیاد نسبت به نقطه بهینه، هزینه‌ها تغییرات چندانی نخواهد داشت. علاوه براین شیب منحنی هزینه‌ها در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن ملایم‌تر است.

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \beta \right) \rightarrow \beta^2 - 2\alpha\beta + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\beta_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (3-20)$$

$$Q_1 = Q^* \beta_1, \quad Q_2 = Q^* \beta_2 \quad (3-21)$$

بنابراین نکته مهم در صنعت امروز ما دستیابی به حدود نقطه بهینه و سعی در عملکرد حوالی این نقطه خواهد بود. روش‌های علمی EOQ این حدود را با اطمینان رضایت‌بخشی مشخص خواهند نمود.

مثال ۶- با استفاده از این خاصیت که هزینه نگهداری و سفارش‌دهی در نقطه ویلسون با یکدیگر برابر هستند رابطه ۱۸-۳ را دوباره اثبات نمایید.

پاسخ:

با توجه به آنچه در قسمت‌های قبل بیان شد، هنگامیکه مقدار سفارش از فرمول ویلسون بدست آید، هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری با یکدیگر برابر خواهند بود و می‌توان از مساوی قرار دادن این دو هزینه، A (هزینه ثابت سفارش‌دهی) را بدست آورد و رابطه ۱۹-۳ را به صورت زیر نوشت:

$$\alpha = \frac{Tc}{Tc^*} = \frac{Tc_h + Tc_s}{(Tc_h + Tc_s)^*} = \frac{A \frac{D}{Q} + h \frac{Q}{2}}{A \frac{D}{Q^*} + h \frac{Q^*}{2}}$$

$$A \frac{D}{Q^*} = h \frac{Q^*}{2} \rightarrow A = \frac{hQ^{*2}}{2D} \rightarrow \alpha = \frac{\frac{hQ^{*2}}{2D} \frac{D}{Q} + h \frac{Q}{2}}{2 \times \frac{hQ^{*2}}{2D} \frac{D}{Q^*}} = \frac{Q^{*2} + Q^2}{2QQ^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^*}{Q} + \frac{Q}{Q^*} \right)$$

مثال ۷- در یک کارخانه سازنده دوچرخه، تعداد موردنیاز چرخ‌های فلزی (رینگ‌ها) از یک مدل دوچرخه برابر با ۱۵۰۰۰ در سال برآورد می‌شود. قیمت هر یک عدد رینگ (هزینه تمام شده تولید)، برابر با ۱۵۰۰ ریال بوده و هزینه آماده‌سازی سیستم تولید برای هر بار تولید این نوع رینگ ۳۰۰۰۰ ریال برآورد گردیده است. هزینه‌های انبارداری در این کارخانه برابر با ۱۵ درصد متوسط موجودی ریالی کالا در انبار در سال است. مدیریت کارخانه، مقدار مجاز نوسان در هزینه کل موجودی‌ها را نسبت به حداقل هزینه ممکن برابر با ۷ درصد تعیین نموده است. مقادیر حداقل و حداکثر هر بار تولید این قطعه و تلورانس نسبت به مقدار اقتصادی تولید چه خواهد بود؟

پاسخ:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2(30000)(15000)}{0.15(1500)}} = 2000$$

$$\beta_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} = 1.07 \pm \sqrt{(1.07)^2 - 1} = \begin{cases} 1.45 \rightarrow Q_1 = Q^* \beta_1 = 2000(1.45) = 2900 \\ 0.69 \rightarrow Q_2 = Q^* \beta_2 = 2000(0.69) = 1380 \end{cases}$$

بنابراین در صورتیکه به جای ۲۰۰۰ عدد رینگ، هر بار حداقل ۱۳۸۰ عدد و یا ۲۹۰۰ عدد در یک سفارش عمل شود، هزینه کل موجودی‌ها نسبت به عدد ایده‌آل و حداقل، تنها ۷ درصد افزایش خواهد داشت.

مثال ۸- سیستمی را از نوع سیستم مقدار سفارش اقتصادی که محصولی با پارامترهای زیر را به صورت موجودی نگهداری می کند در نظر بگیرید.

D: ۶۰۰ واحد در سال،

i: ۲۰٪،

A: ۸ تومان،

L: ۱ سال،

C: ۰/۳ تومان.

مطلوبست:

الف- محاسبه مقدار سفارش اقتصادی.

ب- فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی (طول یک دور).

ج- محاسبه تقاضای مدت تحویل.

د- تعیین هزینه متوسط سالیانه.

پاسخ:

الف-

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(600)(8)}{(0.2)(0.3)}} = 400$$

ب-

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{400}{600} = \frac{2}{3} \text{ سال}$$

ج-

واحد 600 DL=

بنابراین نقطه سفارش برحسب مقدار در دست و مقدار در سفارش برابر است با $r^* = 600$ واحد. برای محاسبه نقطه سفارش برحسب موجودی در دست، ابتدا در نظر داشته باشید که $L/T = 3/2$. بزرگترین عدد صحیحی که کوچکتر از L/T باشد برابر یک می باشد. بنابراین:

$$r_h^* = DL - Q^* = 200 \text{ واحد}$$

د-

$$Tc^* = \sqrt{2DAiC} = \sqrt{2(600)(8)(0.06)} = 24 \text{ تومان}$$

مثال ۹- شرکتی برای یک نوع محصول هر بار ۱۵۰۰ واحد سفارش می دهد که این مقدار سفارش، شرکت را برای شش ماه کفایت می نماید. هزینه خرید هر واحد این محصول ۱۰ تومان و هزینه هر بار سفارش ۲۵ تومان می باشد. اگر نرخ هزینه نگهداری سالیانه این محصول ۲۵ درصد در سال و زمان انتظار تحویل کالا برابر ۱۴ هفته باشد، مطلوبست:

الف- محاسبه هزینه سیستم کنترل موجودی جاری شرکت بدون توجه به هزینه خرید:

ب- محاسبه مقدار صرفه جویی هزینه ها در سال، اگر سفارش این محصول به صورت بهینه انجام گیرد:

ج- محاسبه نقطه سفارش مجدد برحسب موجودی در دست (یک سال را برابر ۵۲ هفته در نظر بگیرید):

پاسخ:

الف -

هفته $Q = 1500$, $A = 25$, $C = 10$, $i = 0.25 \rightarrow h = ic = 2.5$, $L = 14$

$$T = 6 \text{ ماه} = \frac{1}{2} \text{ سال} \rightarrow D = \frac{Q}{T} = 3000$$

$$Tc = \frac{AD}{Q} + \frac{hQ}{2} = 25 \times \frac{3000}{1500} + 2.5 \times \frac{1500}{2} = 50 + 1875 = 1925$$

ب -

$$Tc^* = \sqrt{2ADh} = hQ^* = \frac{2AD}{Q^*} = \sqrt{2 \times 25 \times 3000 \times 2.5} = 612$$

$$\rightarrow Tc - Tc^* = 1925 - 612 = 1313$$

ج -

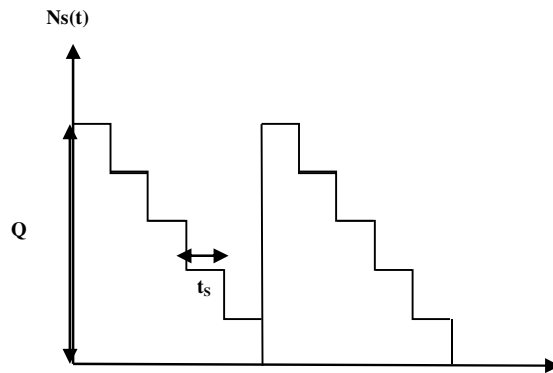
$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 25 \times 3000}{2.5}} = 245, T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{245}{3000} = 0.082, L = \frac{14}{52} = 0.269$$

$$\rightarrow L > T \rightarrow r_h^* = DL - mQ^* = 3000 \times \frac{14}{52} - \left[\frac{\frac{14}{52}}{0.082} \right] \times 245 \approx 73$$

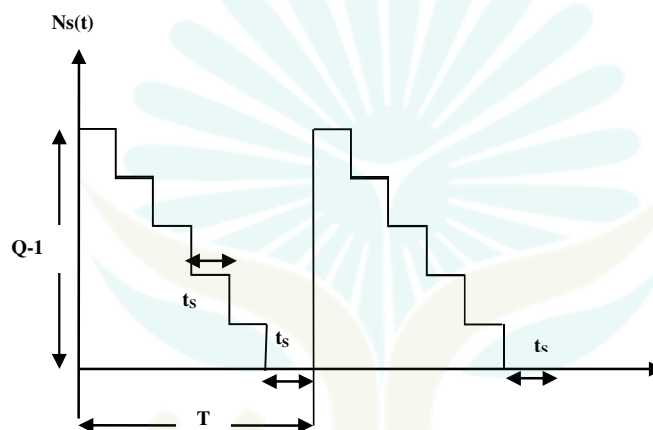
۳-۶ حالت خاص مدل سفارش اقتصادی

در قسمت‌های قبلی تقاضا را به عنوان یک متغیر پیوسته در نظر گرفتیم. در بیشتر کاربردهای عملی در مورد مدل ساده EOQ، Q^* به حد کافی بزرگ است و کاملاً مطلوب است که تقاضا را به عنوان یک متغیر پیوسته در نظر گرفته و آن را به نزدیکترین عدد صحیح روند نماییم. البته در واقعیت هر تقاضا باید رقم صحیحی از واحدها باشد، Q^* نیز باید یک عدد صحیح باشد. بنابراین، لازم است حالتی که تقاضا و مقدار Q محدود به ارقام صحیح مثبت می‌شوند نیز مورد بررسی قرار گیرد. مشخص‌تر آنکه فرض می‌شود که واحدها در هربار به طور تک تقاضا می‌شوند و زمان مابین تقاضاها نیز با قطعیت معلوم باشد.

در حالتی که تقاضا گسسته و عدد صحیح می‌باشد، یک فاصله زمانی به طول t_s میان تقاضاها وجود دارد. در این حالت درست در لحظه‌ای سفارش وارد می‌شود که موجودی در دست به صفر رسیده است، در غیراینصورت هزینه‌ها افزایش خواهند یافت. بنابراین، باید در یک فاصله زمانی t_s که تقاضا مقداری موجودی در دست را به صفر رسانده، سفارش وارد شود. یعنی سیستم در هر سیکل برای یک زمان t_s یک سطح موجودی در دست صفر خواهد داشت. بلافاصله پس از آنکه کالای سفارش داده می‌رسد، یک واحد جنس تقاضا می‌شود. از اینرو، سطح موجودی ماکزیمم $Q-1$ است و سطح موجودی مینی‌مم صفر می‌باشد. (شکل ۱۰-۳ این موضوع را روشن می‌سازد)



الف- به محض اینکه موجودی در دست به صفر رسیده کالا وارد می‌شود.



ب- رفتار موجودی در حالت تقاضای گسسته (برای یک فاصله زمانی t_s انبار بدون موجودی بوده و در لحظه ورود سفارش، تقاضا برای کالا پیش می‌آید)

شکل ۳-۱۰

بنابراین، بهتر است که هرگاه تقاضایی وجود داشته باشد، در انبار موجودی داشته باشیم. به عبارت دیگر موقعی که تقاضا نداریم، انبار خالی از موجودی است. با این روش از هزینه نگهداری اضافی جلوگیری می‌کنیم.

بنابراین، هنگامیکه تقاضا یکی یکی می‌رسد:

$$t_s = \frac{n}{D} = \frac{1}{D} \quad (3-22)$$

هزینه نگهداری + هزینه سفارشات = هزینه کل سیستم

متوسط موجودی در دوره $h \times$ = هزینه نگهداری در هر سیکل

$$= ht_s [Q - 1 + Q - 2 + \dots + 1 + 0]^1 = ht_s \cdot \frac{Q(Q-1)}{2} = \frac{hQ}{D} \left(\frac{Q-1}{2} \right) \quad (3-23)$$

تعداد متوسط سیکل‌ها در هر سال $\frac{D}{Q}$ می‌باشد، در نتیجه، متوسط هزینه‌های نگهداری موجودی در هر سال $\frac{1}{2}h(Q-1)$ می‌شود.

^۱ . به یاد داریم که: $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{هزینه کل نگهداری سالیانه} = ht_s \frac{Q(Q-1)}{2} \times \frac{D}{Q} = \frac{h(Q-1)}{2} \quad (3-24)$$

هزینه سفارش دهی سالیانه بدون تغییر به مقدار $\frac{AD}{Q}$ باقی می ماند. بنابراین، متوسط هزینه سالیانه نگهداری و سفارش دهی برای $Q \geq I$ به صورت زیر است:

$$Tc(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{h}{2}(Q-1) \quad (3-25)$$

$$\rightarrow \begin{cases} Q^*(Q^*-1) < Q_w^2 \\ Q_w^2 < Q^*(Q^*+1) \end{cases} \quad (3-26)$$

بزرگترین Q که در یکی از روابط (۲۶-۳) صدق کند، جواب است.

✓ اگر تقاضا بصورت بسته های n تایی باشد، خواهیم داشت:

$$Q^*(Q^*-n) < Q_w^2, \quad Q_w^2 < Q^*(Q^*+n)$$

موارد کاربرد:

- ۱- تقاضا برای کالا خیلی کم باشد، یعنی فاصله بین دو بار تقاضای متوالی خیلی زیاد باشد.
- ۲- قیمت واحد کالا خیلی زیاد باشد.
- ۳- کالاها در بسته های n تایی به فروش می رسند.

۳-۷ تمرین

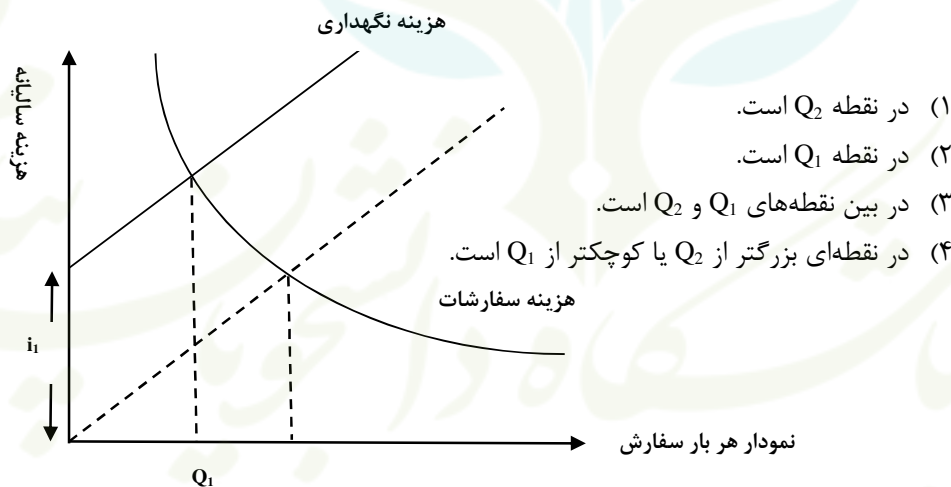
۱. در صورتیکه هزینه‌های سفارش‌دهی به دو برابر افزایش و هزینه نگهداری هر واحد به نصف کاهش یابد، آنگاه:

- (۱) مقدار سفارش و مجموع هزینه‌های سالیانه، هر دو افزایش خواهد یافت.
- (۲) مقدار سفارش ثابت و مجموع هزینه‌های سالیانه کاهش خواهد یافت.
- (۳) مقدار سفارش ثابت اما مجموع هزینه‌های سالیانه افزایش خواهد یافت.
- (۴) مقدار سفارش افزایش اما مجموع هزینه‌های سالیانه ثابت باقی خواهد ماند.

۲. در تعیین نقطه سفارش چه فاکتوری مهم است؟

- (۱) مقدار سفارش
- (۲) میزان تقاضای سالیانه
- (۳) هزینه نگهداری هر واحد کالا
- (۴) میزان تقاضا در مدت زمان تحویل

۳. هزینه‌های ثابت یک انبار، i_1 ریال، و هزینه‌های نگهداری کالا در این انبار، i_2 ریال به ازاء هر واحد کالا در سال است. در این شرایط، با مراجعه به شکل، مقدار اقتصادی هر بار سفارش این کالا:



۴. ثابت کنید که محل تلاقی دو منحنی $hQ/2$ و AD/Q در نقطه Q^* می‌باشد.

۵. فرض کنید A مقدار تخمینی هزینه سفارش و A_a مقدار واقعی آن باشد. اگر K هزینه سالیانه ناشی از استفاده A به جای A_a باشد، آنرا با K^* (هزینه سالیانه بهینه واقعی) مقایسه کنید.

۶. در تمرین ۵ با جانشین کردن h به جای A و h_a بجای A_a آنرا حل کنید.

۷. در یک سیستم موجودی تقاضا برای محصولی ثابت و یکنواخت بوده و کمبود موجودی جایز نمی‌باشد. هزینه ثابت هر بار سفارش‌دهی ۶۰ تومان و مقدار سفارش اقتصادی برابر ۲۴۰ واحد است.

اگر مقدار سفارش فقط بتواند مضربی از ۱۰۰ باشد، آنگاه مقدار سفارش در این شرایط چقدر است؟

۸. در یک مدل ساده قطعی مدت زمان تحویل کالایی یک ماه است. اگر تقاضای سالیانه این کالا ۱۲۰۰۰ واحد، هزینه هر بار سفارش ۲۰ واحد پول و هزینه نگهداری یک واحد کالا در سال ۱۲ واحد پول باشد، نقطه سفارش براساس موجودی در دست چقدر است؟

۹. در یک مدل ساده قطعی اگر مقدار هر بار سفارش ۵۰ درصد بیشتر یا ۵۰ درصد کمتر از مقدار اقتصادی سفارش باشد، هزینه کل چقدر افزایش پیدا خواهد کرد؟

۱۰. برای ارسال یک بسته از طریق پست، هزینه هربار رفتن به محل دفتر پست ۲۰۰ ریال است. هزینه پست نیز صورت زیر محاسبه می‌شود:

بابت هر بسته پستی: مبلغ ثابت ۱۰۰۰ ریال

بابت هر کیلو کالا در بسته پستی: ۵۰۰ ریال

مصرف کالا در مقصد ۵۰۰ کیلو در سال است و هزینه سالیانه نگهداری کالا در مقصد ۳۰۰۰ ریال به ازاء هر کیلو برآورد می‌شود. هر بار که به اداره پست می‌روند فقط یک بسته ارسال می‌کنند. در اینصورت وزن اقتصادی هر بسته باید چند کیلوگرم باشد؟

۱۱. در یک مدل اندازه انباشته اقتصادی بدون کمبود موجودی، هر ۲ ماه یکبار سفارش داده می‌شود و هزینه ثابت هر بار سفارش ۵۰۰۰ تومان است. هزینه نگهداری سالیانه در حالت بهینه چند تومان است؟

۱۲. نرخ تقاضای سالیانه کالایی ۵۲۰۰ واحد، هزینه‌های سفارش‌دهی ۱۰۰۰ تومان، نرخ هزینه نگهداری موجودی ۳۰ درصد در سال به ازاء هر واحد، هزینه متغیر هر واحد ۶۰۰ تومان و کمبود این کالا مجاز نمی‌باشد. به علت فاسد شدن این کالا، حداکثر به مدت سه هفته می‌توان این کالا را در انبار نگهداری نمود. مقدار سفارش اقتصادی این کالا چند واحد است (یک سال را معادل ۵۲ هفته در نظر بگیرید).

۱۳. اگر تقاضای سالیانه محصولی چهار برابر شود، تعداد دفعات سفارش در حالت مدل EOQ، چگونه تغییر می‌کند؟

۱۴. در یک کارخانه سازنده ماشین‌آلات کشاورزی تعداد مورد نیاز قطعه x برابر با ۲۰۰۰۰ عدد در سال می‌باشد. قیمت هر واحد از قطعه x برابر ۲۰۰ ریال بوده و هزینه‌های هر بار سفارش ساخت این قطعه ۴۰۰۰ ریال می‌باشد. هزینه‌های انبارداری برابر با ۲۰ درصد متوسط موجودی این قطعه در سال است. مقدار مجاز نوسان در هزینه کل توسط مدیریت این کارخانه ۵ درصد تعیین شده است. مقادیر حداقل و حداکثر هر بار سفارش را بدست آورید؟

۱۵. اگر مقدار سفارش اقتصادی کالایی بدون در نظر گرفتن کمبود ۱۰۰ واحد، تقاضا برای این کالا ۵۰۰ واحد و هزینه سفارش‌دهی آن ۲۰ واحد پول باشد آن‌گاه:
 الف- مجموع هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری این کالا را بدست آورید.
 ب- هزینه سالیانه نگهداری چقدر است.
 ج- اگر بخواهیم کل هزینه موجودی‌ها ۱۰۰ واحد پول شود، چه مقدار باید سفارش دهیم.
 د- اگر به جای ۱۰۰ واحد، ۲۰۰ واحد کالا سفارش داده شود، در این حالت کل هزینه نگهداری را بدست آورید.

۱۶. در تعمیرگاه اتومبیلی یکی از قطعات یدکی دارای تقاضای کم و برابر ۸ واحد در سال و به فواصل زمانی مساوی اتفاق می‌افتد. هزینه هر بار سفارش ۵۹۹ تومان و قیمت خرید هر واحد، ۱۵۰۰۰ تومان است. چنانچه خرّ هزینه نگهداری ۲۰ درصد در سال باشد، مقدار اقتصادی هر بار سفارش و فاصله زمانی بین دو سفارش چقدر است؟ (یک سال برابر ۲۸۰ روز است).

۱۷. مصرف سالیانه مواد اولیه در شرکت تولیدی ۲۰۰۰ تن، هزینه سفارش‌دهی آن برابر ۲۰۰۰ تومان، قیمت هر تن از این مواد ۱۰۰ تومان، هزینه نگهداری هر تن ۰/۵ تومان در ماه و هزینه بیمه آتش‌سوزی و ... برابر ۲ درصد متوسط ارزش موجودی‌ها در سال می‌باشد. کل هزینه‌های سفارش-دهی این کالا در حالت اقتصادی چقدر است؟

۱۸. در مدل ساده موجودی (که نرخ تقاضا ثابت و معلوم و کمبود موجودی جایز نیست) فرض کنید مدت تحویل برابر ۲/۵ ماه، مقدار سفارش اقتصادی برابر ۱۰۰ واحد و تقاضای سالیانه ۱۲۰۰ واحد است. مطلوبست محاسبه:

الف- مقدار موجودی در دست در موقع سفارش در حالت سفارش اقتصادی.
 ب- مقدار متوسط مواد در سفارش (موادی که سفارش داده شده و هنوز دریافت نشده‌اند).