

۱-۱) در مورد داده های جدول زیر، الف) یک جدول فراوانی با فاصله رده ای ۰/۲۰

(با شروع از ۶/۶۰ - ۶/۶۱ ، ۶/۶۲ - ۶/۶۳ و غیره) محاسبه کنید؛ ب) یک نمودار ستونی

رسم کنید، و ج) یک تابع فراوانی تجمعی رسم کنید.

قطرهای سرمیخ پرچها بر حسب صدم اینچ

۶/۷۲	۶/۷۷	۶/۸۲	۶/۷۰	۶/۷۸	۶/۷۰	۶/۶۲
۶/۷۵	۶/۶۶	۶/۶۶	۶/۶۴	۶/۷۶	۶/۷۳	۶/۸۰
۶/۷۲	۶/۷۶	۶/۷۶	۶/۶۸	۶/۶۶	۶/۶۲	۶/۷۲
۶/۷۶	۶/۷۰	۶/۷۸	۶/۷۶	۶/۶۷	۶/۷۰	۶/۷۲
۶/۷۴	۶/۸۱	۶/۷۹	۶/۷۸	۶/۶۶	۶/۷۶	۶/۷۲
۶/۷۴	۶/۷۰	۶/۷۸	۶/۷۶	۶/۷۰	۶/۷۶	۶/۷۶
۶/۶۷	۶/۶۲	۶/۶۸	۶/۷۴	۶/۷۴	۶/۸۱	۶/۶۶
۶/۶۸	۶/۷۲	۶/۷۴	۶/۶۴	۶/۷۹	۶/۷۲	۶/۸۲
۶/۸۰	۶/۷۴	۶/۷۳	۶/۸۱	۶/۷۷	۶/۶۰	۶/۷۲
۶/۶۸	۶/۷۸	۶/۷۶	۶/۷۴	۶/۷۰	۶/۶۴	۶/۷۸
۶/۷۲	۶/۷۱	۶/۶۴	۶/۷۰	۶/۷۰	۶/۷۵	
۶/۶۷	۶/۷۲	۶/۷۶	۶/۶۴	۶/۶۹	۶/۷۳	
۶/۶۷	۶/۶۶	۶/۸۴	۶/۷۳	۶/۶۶	۶/۶۶	

پاسخ:

$$\begin{cases} \min = 6/60 \\ \max = 6/84 \end{cases} \begin{cases} \text{تعداد داده ها } (N) = 64 \\ \text{طول بازه ها} = 0/02 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{تعداد بازه ها } (n) = \frac{6/84 - 6/60}{0/02} = 12 \end{cases}$$

i		f_i	x_i	d_i	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i x_i^2$	$f_i d_i^2$
۱	۰/۶۰-۰/۶۲	۱	۰/۶۱	-۰/۱۲	۰/۶۱	-۰/۱۲	۰/۳۷۲۱	۰/۰۱۴۴
۲	۰/۶۲-۰/۶۳	۴	۰/۶۳	-۰/۱۰	۲/۵۲	-۰/۴	۱/۵۸۷۶	۰/۰۴
۳	۰/۶۴-۰/۶۵	۵	۰/۶۵	-۰/۰۸	۳/۲۵	-۰/۴	۲/۱۱۲۵	۰/۰۳۲
۴	۰/۶۶-۰/۶۷	۱۲	۰/۶۷	-۰/۰۶	۸/۰۴	-۰/۷۲	۵/۳۸۶۸	۰/۰۴۳۲
۵	۰/۶۸-۰/۶۹	۵	۰/۶۹	-۰/۰۴	۳/۴۵	-۰/۲	۲/۳۸۰۵	۰/۰۰۸
۶	۰/۷۰-۰/۷۱	۱۰	۰/۷۱	-۰/۰۲	۷/۱	-۰/۲	۵/۰۴۱۰	۰/۰۰۴
۷	۰/۷۲-۰/۷۳	۱۷	۰/۷۳	۰	۱۲/۴۱	۰	۹/۰۵۹۳	۰
۸	۰/۷۴-۰/۷۵	۹	۰/۷۵	۰/۰۲	۶/۷۵	۰/۱۸	۵/۰۶۲۵	۰/۰۳۶
۹	۰/۷۶-۰/۷۷	۱۴	۰/۷۷	۰/۰۴	۱۰/۷۸	۰/۵۶	۸/۳۰۰۶	۰/۰۲۲۴
۱۰	۰/۷۸-۰/۷۹	۸	۰/۷۹	۰/۰۶	۶/۳۲	۰/۴۸	۴/۹۹۲۸	۰/۰۲۸۸
۱۱	۰/۸۰-۰/۸۱	۶	۰/۸۱	۰/۰۸	۴/۸۶	۰/۴۸	۳/۹۳۶۶	۰/۰۳۸۴
۱۲	۰/۸۲-۰/۸۴	۳	۰/۸۳	۰/۱۰	۲/۴۹	۰/۳	۲/۰۶۶۷	۰/۰۳۰

i	f_i	x_i	d_i	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i x_i^2$	$f_i d_i^2$
Σ	۹۴			۶۸/۵۸	-۰/۰۴	۵۰/۲۹۹	۰/۲۶۴۸

مبدأ اختیاری $x_0 = ۶/۷۳$

می دانیم که رابطه ای به شکل روبرو بین متغیر d_i و x_i برقرار است:

$$x_i = x_0 + d_i = ۶/۷۳ + d_i$$

$$\bar{y} = b + a\bar{x} \quad , \quad \sigma_y = \sqrt{a}\sigma_x$$

اما توجه داشته باشید که در هنگام تحلیل نتایج حاصل از نمونه گیری به جای σ از

انحراف معیار نمونه یا S به شرح زیر استفاده می شود:

$$S = \left[\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\sum_{i=1}^N (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}x_i)}{N-1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 + N\bar{x}^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^N x_i}{N-1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

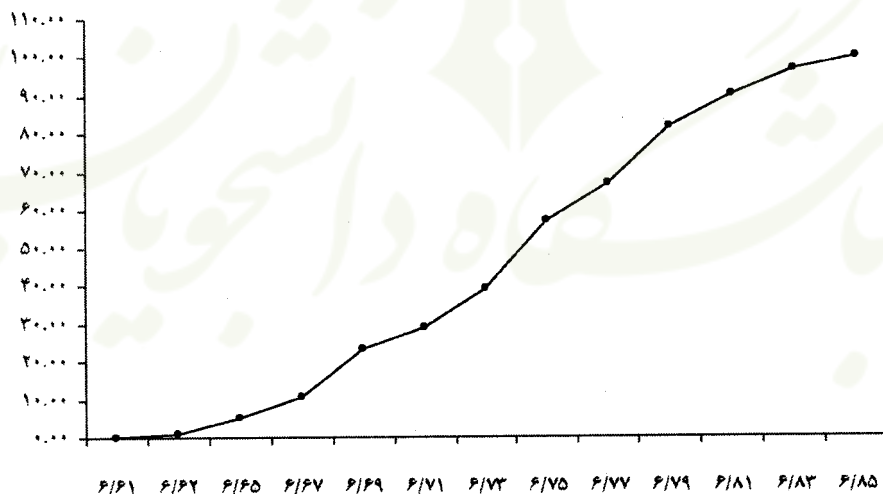
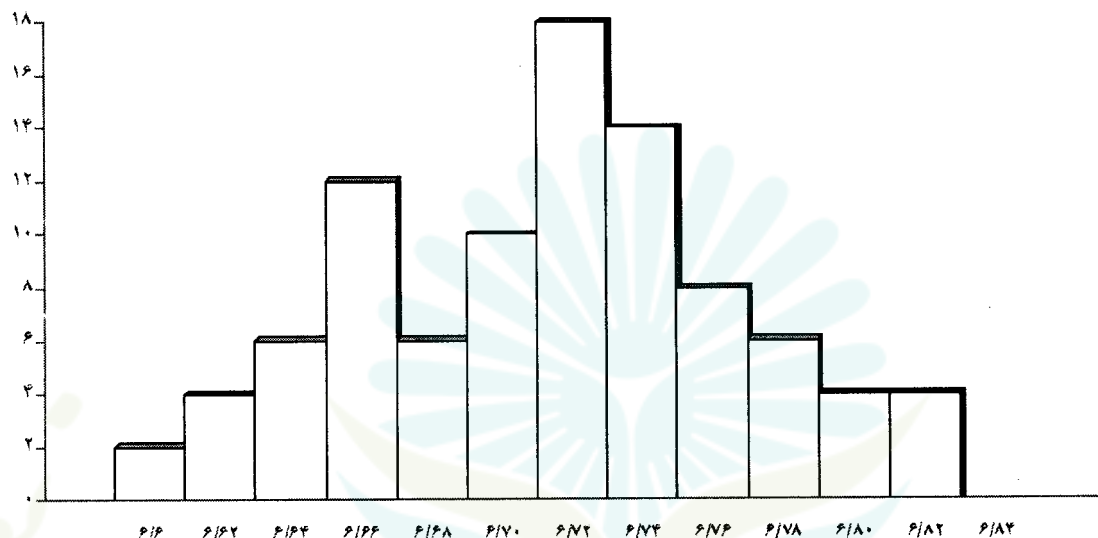
$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 + N\bar{x}^2 - 2N\bar{x}^2}{N-1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{94} \frac{X_i}{94} + ۶ = ۶ + \frac{۶۸/۵۸}{۹۴} = ۶ + ۰/۷۲۹۶ = ۶/۷۲۹۶$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{94} d_i}{94} = \frac{-۰/۰۴}{94} = -۴/۲۵۵ \times ۱۰^{-4} \Rightarrow \bar{X} = X_0 + \bar{d} = ۶/۷۳ - ۴/۲۵۵ \times ۱۰^{-4} = ۶/۷۲۹۶$$

$$S_x = \left[\frac{(\sum x_i^2 - N\bar{x}^2)}{N-1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(۵۰/۲۹۹ - ۹۴ \times ۰/۷۲۹۶^2)}{۹۳} \right]^{\frac{1}{2}} = ۰/۰۳۳۶$$

$$S_d = \left[\frac{\sum d_i^2 - N\bar{d}^2}{N-1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{0.72648 - 94 \times (8.250 \times 10^{-3})^2}{93} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.0336$$



۱-۲) میانگین و انحراف معیار داده های خام مساله ۱ را محاسبه کنید. میانگین و

انحراف معیار داده های رده بندی شده مساله ۱ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} \bar{X} = 6/7218 \\ S = 0/05432 \end{cases}$$

۱-۳) در تجربه سنجش درصد انقباض بر اثر خشک کردن، نتایج زیر از ۵۰ نمونه گل

رس قالبگیری به دست آمده است:

۱۹/۳	۲۰/۵	۱۷/۹	۱۷/۳	۱۷/۱
۱۵/۸	۱۶/۹	۱۷/۱	۱۹/۵	۲۲/۵
۲۰/۷	۱۸/۵	۲۲/۵	۱۹/۱	۱۷/۹
۱۸/۴	۱۸/۷	۱۸/۸	۱۷/۵	۱۷/۵
۱۴/۹	۱۲/۳	۱۹/۴	۱۶/۸	۱۹/۳
۱۷/۳	۱۹/۵	۱۷/۴	۱۶/۳	۱۸/۸
۲۱/۳	۲۳/۴	۱۸/۵	۱۹/۰	۱۹/۰
۱۶/۱	۱۸/۸	۱۷/۵	۱۸/۲	۱۷/۴
۱۸/۶	۱۸/۳	۱۶/۵	۱۷/۴	۱۷/۴
۲۰/۵	۱۶/۹	۱۷/۵	۱۸/۲	۲۲/۵

الف) این درصدها را در قالب یک جدول فراوانی با فواصل رده ای ۱ درصد با شروع

از ۱۲/۹-۱۲/۰ رده بندی کنید؛ ب) یک نمودار ستونی بکشید و ج) یک تابع فراوانی

تجمعی رسم کنید.

۴-۱) در مساله ۳، میانگین و انحراف معیار داده های خام و رده بندی شده را

محاسبه کنید.

۳-۱، ۴-۱)

پاسخ:

i		f_i	d_i	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$	درصد فراوانی تجمعی	
۱	۱۲-۱۲/۹	۱	-۶	-۶	۳۶	۲	/
۲	۱۳-۱۳/۹	۰	-۵	۰	۰	۲	
۳	۱۴-۱۴/۹	۱	-۴	-۴	۱۶	۴	/
۴	۱۵-۱۵/۹	۱	-۳	-۳	۹	۶	/
۵	۱۶-۱۶/۹	۶	-۲	-۱۲	۲۴	۱۸	### /
۶	۱۷-۱۷/۹	۱۴	-۱	-۱۴	۱۴	۴۶	### ### ////
۷	۱۸-۱۸/۹	۱۱	۰	۰	۰	۶۸	### ### /

۸	۱۹-۱۹/۹	۸	۱	۸	۸	۸۴	## ///
۹	۲۰-۲۰/۹	۳	۲	۶	۱۲	۹۰	///
۱۰	۲۱-۲۱/۹	۱	۳	۳	۹	۹۲	/
۱۱	۲۲-۲۲/۹	۳	۴	۱۲	۴۸	۹۸	///
۱۲	۲۳-۲۳/۹	۱	۵	۵	۲۵	۱۰۰	/
Σ		۵۰		-۵	۲۰۱		

مبدأ اختیاری $x = ۱۸/۵$

$$S_o = \left[\frac{۲۰۱ - ۵۰ \times (۰/۱)^2}{۴۹} \right]^{1/2} = ۲/۰۲۵$$

$$\bar{x} = x + \bar{d} = ۱۸/۵ - ۰/۱ = ۱۸/۴$$

$$\begin{cases} \bar{x} = ۱۸/۳۷ \\ S = ۱/۹۹۵ \end{cases}$$

نمودار تابع توزیع تجمعی و نمودار ستونی در این مسئله نیز مانند مسئله ۱ رسم می شود.

۵-۱) اولین ۵۰ مشاهده جدول ۱/۱ (از تاریخ ۴۷/۱/۲ تا ۴۷/۱/۳۰) را گرفته و الف)

یک جدول فراوانی با فاصله رده ای ۱۰۰ ساعت با شروع از ۲۰۱-۳۰۰ محاسبه کنید؛

ب) یک نمودار ستونی بکشید؛ و ج) یک تابع فراوانی تجمعی رسم کنید.

۶-۱) میانگین و انحراف معیار داده های خام مساله ۵ را محاسبه کنید. میانگین و

انحراف معیار داده های رده بندی شده مساله ۵ را محاسبه کنید.

(۷-۱) مساله ۵ را با استفاده از ۵۰ مشاهده دوم (از ۴۷/۲/۶ تا ۴۷/۳/۶) تکرار کنید.

(۸-۱) میانگین و انحراف معیار داده های خام مساله ۷ را محاسبه کنید. میانگین و

انحراف معیار داده های رده بندی شده مساله ۷ را محاسبه کنید.

(۹-۱) مساله ۵ را با استفاده از ۵۰ مشاهده سوم (از ۴۷/۳/۱۳ تا ۴۷/۴/۱۰) تکرار کنید.

(۱۰-۱) میانگین و انحراف معیار داده های خام مساله ۹ را محاسبه کنید. میانگین و

انحراف معیار داده های رده بندی شده مساله ۹ را محاسبه کنید.

(۱۱-۱) مساله ۵ را با استفاده از ۵۰ مشاهده چهارم (از ۴۷/۴/۱۷ تا ۴۷/۵/۱۵) تکرار

کنید.

(۱۲-۱) میانگین و انحراف معیار داده های خام مساله ۱۱ را محاسبه کنید. میانگین و

انحراف معیار داده های رده بندی شده مساله ۱۱ را محاسبه کنید.

پاسخ:

میانگین و انحراف معیار برای داده های خام مسائل ۵ الی ۱۲ در جدول زیر آمده

است:

شماره ی مسائل شاخصهای آماری	۵-۶	۷-۸	۹-۱۰	۱۱-۱۲
$\bar{X}$	۱۰۲۷/۰۸	۹۹۵/۰۲	۹۸۸/۰۲	۹۸۲/۴
S_x	۱۴۸/۳۶۲۱	۱۶۵/۳۲۴۸	۱۳۰/۰۴۳۱	۱۸۳/۶۶۰۸

(۱۳-۱) نشان دهید که $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0$ است.

پاسخ:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \Rightarrow N\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N \bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0.$$

۱-۱۴) اتحاد جبری $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2$ را به اثبات برسانید.

پاسخ:

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^N (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N \bar{x}^2$$

$$(\sum_{i=1}^N x_i = N\bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2N\bar{x}^2 + \sum_{i=1}^N \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2$$

۱-۱۵) اگر همه مشاهدات موجود در جدول ۱-۱ با کم کردن ۵۰۰ ساعت از هر یک

تغییر داده شوند این عمل چه تاثیری بر میانگین و انحراف معیار داده ها می گذارد؟

پاسخ:

$$y_i = ax_i + b \Rightarrow \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} = \sum_{i=1}^N (a \frac{x_i}{N} + \frac{b}{N}) = a\bar{x} + b$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^N (ax_i + b - a\bar{x} - b)^2}{N-1} = \frac{a^2 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}$$

$$\Rightarrow S_y^2 = a^2 S_x^2 \Rightarrow S_y = a S_x$$

$$y'_i = y_i - 500 \Rightarrow \bar{y}' = \bar{y} - 500$$

$$S_y = a S_x \Rightarrow S_{y'} = S_y$$

۱-۱۶) اگر همه مشاهدات موجود در جدول ۱-۱ با تقسیم شدن هر یک به ۱۰۰ ساعت

تغییر داده شوند، این عمل چه تاثیری بر میانگین و انحراف معیار داده ها می گذارد؟

پاسخ:

$$y'_i = \frac{1}{100} y_i$$

$$\bar{y}' = \frac{\sum_{i=1}^N y'_i}{N} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{N} = \frac{1}{100} \bar{y}$$

$$S_{y'} = a S_y = \frac{1}{100} S_y$$



باشگاه دانشجویان پیام نور