مسائل فصل دوم

۲-۱) فضای نمونه Ω از سه نقطه w_1, w_2, w_3 تشکیل شده است. احتمالهای نظیر این سه نقطه، به ترتیب عبارتند از $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ ، متغیر تصادفی x به صورت زیر تعریف می شود:

$$X(w_1) = 0 \qquad X(w_2) = 0 \qquad X(w_3) = 1$$

الف) توزیع احتمال x یعنی $P_x(k)$ را پیدا کنید؛ ب) تابع تجمعی x یعنی $F_x(b)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) متغیر تصادفی X غیر یک به یک است.

k	w_1	w_2	w_3
$X(k)$	۰	۰	۱
$f_X(k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & X = 0 \\ \frac{1}{2} & X = 1 \end{cases}$$

ب)

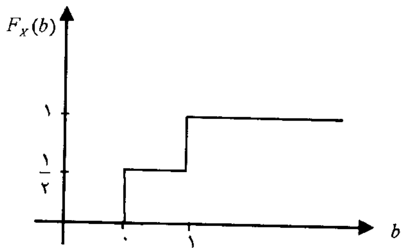
$$F_X(0) = p_X(k=0) = \frac{1}{2}$$

$$F_X(1) = F_X(0) + F_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

CDF گسسته

b	۰	۱
$F_X(b)$	$\frac{1}{2}$	۱

برای رسم نمودار این تابع توزیع فرض می کنیم که تابع توزیع از نوع پیوسته باشد.



۲-۲) شماره های یک تاس پاک شده؛ دو وجه آن با رنگ سیاه، دو وجه آن با رنگ قرمز، یک وجه آن با رنگ زرد، و یک وجه آن با رنگ سبز رنگ آمیزی شده است. تاس را یک دفعه پرتاب می کنیم. فضای نمونه را توصیف کنید.

پاسخ:

$$\text{فضای نمونه} = \text{مجموعه تمام حالات ممکن} \Rightarrow \Omega = \{\text{سیاه، قرمز، زرد، سبز}\}$$

۲-۳) در مساله ۲، احتمالات «نقاط» فضای نمونه هماهنگ با احتمالات نظیر تاسی سالم توزیع می شوند؛ یعنی داریم $P\{\text{سیاه}\} = \frac{۲}{۶}$، $P\{\text{قرمز}\} = \frac{۲}{۶}$، $P\{\text{زرد}\} = \frac{۱}{۶}$، $P\{\text{سبز}\} = \frac{۱}{۶}$. متغیر تصادفی X را انتخاب می کنیم که به سیاه مقدار صفر، به قرمز مقدار یک، به زرد مقدار یک و به سبز مقدار دو را نسبت می دهد.

الف) تابع احتمال X؛ یعنی، $P_x(k)$ را پیدا کنید؛ ب) تابع تجمعی X؛ یعنی، $F_X(b)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\text{الف)}\quad f_X(k)=\begin{cases}\frac{۲}{۶} & X=۰\\ \frac{۱}{۶}+\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۲} & X=۱\\ \frac{۱}{۶} & X=۲\end{cases}$$

$$\text{ب)}\quad F_x(b)=P(x\le b)=\begin{cases}۰ & b<۰\\ \frac{۲}{۶} & ۰\le b<۱\\ \frac{۵}{۶} & ۱\le b<۲\\ ۱ & b\ge ۲\end{cases}$$

۲-۴) سه تاس سالم را می ریزیم. فضای نمونه را توصیف کنید.

پاسخ:

$\Omega_۱$ فضای نمونه در پرتاب ۱ تاس ۶ وجه:

$$\Omega_۱=\{w|w=۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

Ω_n فضای نمونه در پرتاب n تاس (n بار پرتاب تاس) ۶ وجه:

$$\Omega_n=\{(w_۱,w_۲,\ldots,w_n)|w_i=۱,۲,۳,۴,۵,۶; i=۱,۲,۳,\ldots,n\}\ ;\ n(\Omega_n)=۶^n$$

در اینجا، فضای نمونه برابر است با:

$$\Omega_۳=\{(w_۱,w_۲,w_۳)|w_i=۱,۲,۳,\ldots,۶\}$$

۲-۵) در مساله ۴، متغیری تصادفی را در نظر بگیرید که مقدار آن برابر با مجموع شماره های یک است که با ریختن سه تاس ظاهر می شوند. الف) تابع احتمال X، یعنی $P_X(k)$ را پیدا کنید. ب) تابع تجمعی X را رسم کنید.

پاسخ:

می دانیم در n بار پرتاب تاس هر یک از اعداد ۱ تا ۶ می توانند ۰ تا n بار تکرار شوند.

متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد دفعات تکرار عدد ۱ است.

$$\Omega = \{w \mid w = ۰,۱,۲,۳\}$$

$$\text{احتمال ۱ شدن تاس} = \frac{۱}{۶}$$

$$\text{احتمال k بار ۱ آمدن در ۳ بار پرتاب} \quad f_X(k) = \binom{۳}{k}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{k}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳-k} = \binom{۳}{k}\frac{۵^{۳-k}}{۶^{۳}}$$

$$F_X(b) = \begin{cases} ۰ & b < ۰ \\ \frac{۱۲۵}{۲۱۶} & ۰ \le b < ۱ \\ \frac{۲۰۰}{۲۱۶} & ۱ \le b < ۲ \\ \frac{۲۱۵}{۲۱۶} & ۲ \le b < ۳ \\ ۱ & ۳ \le b \end{cases} \qquad f_X(k) = \begin{cases} \frac{۱۲۵}{۲۱۶} & k = ۰ \\ \frac{۷۵}{۲۱۶} & k = ۱ \\ \frac{۱۵}{۲۱۶} & k = ۲ \\ \frac{۱}{۲۱۶} & k = ۳ \end{cases}$$

۲-۶) در یک روز یک ماشین سه قلم کالا تولید می کند، که کیفیت هر یک بر حسب سالم یا ناقص بودن در پایان روز تعیین می شود. فضای نمونه تولید روزانه را توصیف کنید.

پاسخ:

با در نظر گرفتن منظم کالا داریم:

سالم = C و ناقص = D $\qquad \Omega_۱ = \{C, D\}$

و با در نظر گرفتن هر سه قلم کالا داریم:

$\Omega_{۲} = \{(C,C,C),(C,C,D),(C,D,C),(D,C,C),(C,D,D),(D,C,D),(D,D,C),(D,D,D)\}$

۲-۷) در مساله ٦، متغیر تصادفی X را به عنوان تعداد اقلام ناقص در نظر بگیرید. فرض کنید نقاط درون فضای نمونه دارای احتمالهای یکسانی هستند. الف) تابع احتمال X، یعنی $P_X(k)$ را پیدا کنید. ب) تابع تجمعی X را رسم کنید.

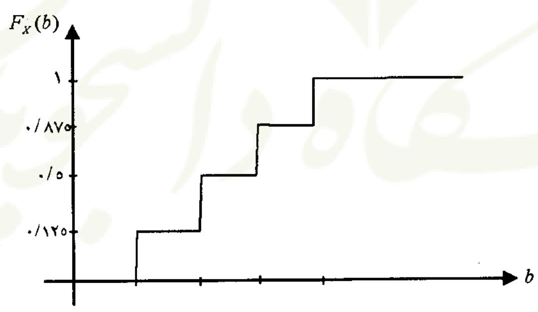
پاسخ:

$X=$ تعداد اقلام ناقص

$f=\frac{۱}{۲}$ احتمال ناقص بودن یک قلم کالا $;n(s)=۲^{۳}=۸$

$$f_X(k)=\begin{cases}\frac{۱}{۸} & k=۰\\ \frac{۳}{۸} & k=۱\\ \frac{۳}{۸} & k=۲\\ \frac{۱}{۸} & k=۳\end{cases}$$

$$F_X(b)=\begin{cases}۰ & b<۰\\ \frac{۱}{۸} & ۰\le b<۱\\ \frac{۱}{۲} & ۱\le b<۲\\ \frac{۷}{۸} & ۲\le b<۳\\ ۱ & ۳\le b\end{cases}$$



۲-۸) در مساله ٦، فرض کنید که هر قلم کالای سالم سودی معادل ۱۰۰۰ واحد پول و هر قلم کالای ناقص زیانی معادل ۲۵۰ واحد پول درپی دارد. متغیر تصادفی Y را

سود روزانه در نظر بگیرید. با فرض اینکه نقاط درون فضای نمونه دارای احتمالهای یکسانی هستند، تابع احتمال متغیر تصادفی Y؛ یعنی، $P_Y(k)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

Y= متغیر تصادفی سود خالص تولید روزانه

X= متغیر تصادفی تعداد اقلام ناقص

$$Y_X(k)=۱۰۰۰(۳-k)-۲۵۰k \qquad k=۰,۱,۲,۳$$

$$Y_X(k)=\begin{cases}۳۰۰۰ & k=۰\\ ۱۷۵۰ & k=۱\\ ۵۰۰ & k=۲\\ -۷۵۰ & k=۳\end{cases} \quad\Rightarrow\quad P_Y(k)=\begin{cases}\frac{۱}{۸} & k=-۷۵۰\\ \frac{۳}{۸} & k=۵۰۰\\ \frac{۳}{۸} & k=۱۷۵۰\\ \frac{۱}{۸} & k=۳۰۰۰\end{cases}$$

۲-۹) در ساخت بال یک هواپیما از تعداد زیادی میخ پرچ استفاده می شود. در بازرسی از یک بال، تعداد میخ پرچهای خراب عامل مهمی شمرده می شود. فضای نمونه را توصیف کنید.

پاسخ:

W = تعداد میخ پرچهای ناقص بال هواپیما

N= تعداد کل میخ پرچهای بال هواپیما

$$\Omega_۱=\{w|w=۰.۱,۲,...,N\}$$

۲-۱۰) الف) مقاومتهای برشی دو نقطه جوش باید اندازه گیری شود. اگر حد بالایی را با U مشخص کنیم، فضای نمونه را توصیف کنید. مقاومت برشی بزرگتر را با $X_{\max}$ معرفی کنید و مقادیر ممکن قابل پذیرش توسط آن را پیدا کنید؛ ب) تجربه ای را انجام می دهیم که درصد اکسید گوگرد در نمونه ای از هوا را تعیین می کند. فضای نمونه را توصیف کنید. فرض کنید متغیر تصادفی X معرف درصد اکسید گوگرد موجود باشد. محدوده تغییرات مقادیر این متغیر تصادفی را مشخص کنید.

پاسخ:

الف) از آنجا که حد پایین (l) مقاومت برشی نقطه جوش ها صفر است داریم:

$$\Omega_{۱} = \{(w_{۱}, w_{۲}) | ۰ \le w_{۱}, w_{۲} \le U; w_{۱}, w_{۲} \in \Re\}$$

$$X_{\max}\{(w_{۱}, w_{۲})\} = \max\{w_{۱}, w_{۲}\} \Rightarrow \Omega_{۲} = \{w = X_{\max} | ۰ \le w \le U, w \in \Re\}$$

ب)

$$\Omega_{۲} = \{w | ۰ \le w \le ۱۰۰, w \in \Re\}$$

X متغیر تصادفی نشان دهنده ی درصد گوگرد موجود می باشد. $۰ \le X \le ۱۰۰$

۲-۱۱) فرض کنید تقاضای روزانه برای بنزین در یک جایگاه فروش از ۱۰۰۰ گالن بیشتر نیست. یک اندازه گیری در این زمینه انجام می دهیم: الف) فضای نمونه را توصیف کنید؛ ب) هر گالن بنزین که به فروش برسد معادل ٦ واحد پول از آن عاید می شود، در حالی که هر گالن بنزین فروش نرفته زیانی معادل $\frac{۱}{۲}$ واحد پول در پی

دارد (به خاطر هزینه نگهداری). اگر متغیر تصادفی X معرف تقاضا و متغیر تصادفی Y معرف سود باشد، متغیر تصادفی Y را بر حسب X بیان کنید.

پاسخ:

در این مسئله دو حالت اتفاق می افتد، زمانی که تقاضا از مقدار بنزین کمتر باشد، یا بنزین موجود تقاضا را برآورده کند، بنابراین مقدار بنزین موجود روزانه را با R تعریف می کنیم:

الف) $\Omega = \{w | ۰ \le w \le ۱۰۰۰, w \in \Re\}$

ب) X متغیر تصادفی نشان دهنده میزان تقاضای بنزین موجود در جایگاه فروش است.

$$Y = \begin{cases} +۶R & R \le x \\ +۶X - \dfrac{R-X}{۲} = \dfrac{۱۳X - R}{۲} & R > x \end{cases}$$

که با جایگذاری R= ۱۰۰۰ عبارت روبرو حاصل می شود. $y = \dfrac{۱۳X - ۱۰۰۰}{۲}$

۲-۱۲) تصور کنید که بر یک روی سکه سالمی عدد $r_۱$ و بر روی دیگر آن عدد $r_۲$ نقش شده است. متغیر تصادفی X یکی از دو مقدار $r_۱$ یا $r_۲$ را، بسته به اینکه با انداختن سکه کدام عدد در روی سکه قرار گیرد، می پذیرد: الف) اعداد $r_۱, r_۲$ را طوری تعیین کنید که $E(X) = ۰$ و انحراف معیار X مساوی ۲ باشد؛ ب) تابع تجمعی X را رسم کنید.

پاسخ:

$\Omega = \{$ رو، پشت $\}$ X= (رو $r_۱$ و پشت $r_۲$)

با شرط سالم بودن سکه

$X(k)$	r_1	r_2
$f_x(k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(x)=\frac{1}{2}r_1+\frac{1}{2}r_2=0 \Rightarrow r_1+r_2=0$$

$$E(x^2)=\sum k^2 P_x(k)=\frac{r_1^2+r_2^2}{2} \Rightarrow \sigma_x^2=\frac{r_1^2+r_2^2}{2}-(\frac{r_1+r_2}{2})^2=(\frac{r_1-r_2}{2})^2=4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1+r_2=0 \\ r_1-r_2=\pm 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} r_1=2 \\ r_2=-2 \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} r_1=-2 \\ r_2=2 \end{cases}$$

$$F_k(b)=\begin{cases} 0 & b<-2 \\ \frac{1}{2} & -2\le b<2 \\ 1 & 2\le b \end{cases}$$

۲-۱۳) فرض کنید متغیر تصادفی X معرف عددی باشد که تاسی ناقص می دهد. تابع احتمال X به شرح زیر است:

$$P_X(1)=P_X(2)=\frac{1}{6};P_X(3)=\frac{1}{12};P_X(4)=P_X(5)=\frac{1}{4};P_X(6)=d$$

الف) مقدار d را تعیین کنید؛ ب) CDF را به ازای b=۳/۶ محاسبه کنید. یعنی $F_X(3/6)$ را پیدا کنید. ج) $P\{3\le X<5\}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) $\sum f_x(k)=1 \Rightarrow 2\times\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{4}+d=1 \Rightarrow d=\frac{1}{12}$

ب)

b	$X<1$	$1\le X<2$	$2\le X<3$	$3\le X<4$	$4\le X<5$	$5\le X<6$	$X\ge 6$

$F_x(b)$	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۵}{۱۲}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱۱}{۱۲}$	۱

$$F_x(۳/۶)=\frac{۵}{۱۲}$$

ج) $P(۳\le X<۵)=F_x(۴)-F_x(۲)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$

۲-۱۴) در تجربه ای که شرح آن در مساله ۹ آمد، تعداد میخ پرچهای ناقص، X، متغیری تصادفی است که توزیع آن با دقت مناسبی طبق توزیع پواسون با پارامتر $\lambda=۳$ تقریب زده می شود. احتمال عدم وجود یک میخ پرچ ناقص روی یک بال، یعنی $P_X(۰)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$P_x(k)=\frac{\lambda^k.e^{-\lambda}}{k!}\xrightarrow{\lambda=۳}P_x(k)=\frac{۳^k.e^{-۳}}{k!}$$

$$K=۰\Rightarrow P_x(۰)=\frac{۳^۰.e^{-۳}}{۰!}=e^{-۳}$$

۲-۱۵) یک بندرگاه قادر است امکان پهلوگیری چهار کشتی از یک نوع مشخص را برای توقف شبانه فراهم کند. عوارض بندرگاه هر شب ۱۰۰۰ واحد پول برای هر کشتی است. متغیر تصادفی X را معرف تعداد کشتیهایی بگیرید که هر شب قصد پهلوگیری دارند و چنین فرض می کند که $P_X(k)=\frac{۱}{۶}\quad ;k=۰,۱,۲,۳,۴,۵$ باشد الف)

اگر متغیر تصادفی Y معرف سود شبانه باشد، آن را بـر حسـب X تعریـف کنیـد؛ ب)

تابع احتمال Y؛ یعنی، $P_Y(k)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) $y=\begin{cases}۱۰۰۰x & x\le ٤\\ ٤۰۰۰ & x=٥\end{cases}$

ب)

K بر حسب هزار واحد	۰	۱	۲	۳	٤
$P_y(k)$	$\frac{۱}{٦}$	$\frac{۱}{٦}$	$\frac{۱}{٦}$	$\frac{۱}{٦}$	$\frac{۱}{۳}$

۲-۱٦) در یک آزمایش خمش حول سمبه، یک قطعـه $\frac{۳}{۸}$ اینچـی از قسـمت جـوش داده شده لوله ای فولادی با قطر زیاد را دور سمبه ای با قطر معین خم می کنیم. این عمـل باعث ایجاد تنش در ناحیه جوشکاری شده می شود، طول ترکیدگی ایجاد شده در این ناحیه را ثبت می کنیم. فرض می کنیم طول مشهود ترکیـدگی جـوش بـر حسـب ایـنچ متغیر تصادفی X با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_x(z)=\begin{cases}۰ & z<۰\\ \dfrac{۱}{۰/۰٤} & z\ge ۰\end{cases}$$

الف) احتمال مشاهده ترکیدگی متجاوز از $\frac{۱}{۲}$ اینچ را پیدا کنید؛ ب) DCF؛ یعنـی $F_X(b)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

تابع f توزیع نمایی با پارامتر $\theta=۰/۰٤$ دارد.

$$f_x(z)=\frac{e^{-\frac{z}{۰/۰۴}}}{۰/۰۴}=۲۵e^{-۲۵z}\quad ; z\geq ۰$$

الف) $P\left\{X\geq \frac{۱}{۲}\right\}=\int_{\frac{۱}{۲}}^{+\infty}\frac{۱}{۰/۰۴}e^{-\frac{z}{۰/۰۴}}dz=e^{-۱۲/۵}$

ب) $F_x(b)=P\{x\leq b\}=\begin{cases}۰ & b<۰\\ ۱-e^{-\frac{b}{۰/۰۴}} & b\geq ۰\end{cases}$

۲-۱۷) تصور کنید که عمر نوع معینی از لامپ، L بر حسب ساعت دارای تابع چگالی زیر است:

$$f_L(z)=\begin{cases}۰ & z<۱۰۰۰\\ \frac{a}{z^۲} & z\geq ۱۰۰۰\end{cases}$$

الف) مقدار a را پیدا کنید؛ ب) CDF را تعیین کنید؛ ج) احتمال اینکه یک لامپ دست کم ۱۵۰۰ ساعت عمر کند چقدر است؟

پاسخ:

الف) تابع چگالی روبرو پیوسته است پس باید $f_x(z)=\frac{a}{z^۲};\ z\geq ۱۰۰۰$ در شرط $f_x(z)\geq ۰$ صدق کند که این رابطه به ازای هر $a\geq ۰$ برقرار است.

$$CDF_x(b)=\int_{۱۰۰۰}^{b}\frac{a}{z^۲}dz=\left[\frac{a}{z}\right]_b^{۱۰۰۰}=a\left(\frac{۱}{۱۰۰۰}-\frac{۱}{b}\right)=\frac{a(b-۱۰۰۰)}{۱۰۰۰b},\ b\geq ۱۰۰۰$$

$$\lim_{b\to+\infty}CDF_x(b)=۱\Rightarrow\frac{a}{۱۰۰۰}=۱\Rightarrow a=۱۰۰۰$$

$$\Rightarrow CDF_x(b)=۱-\frac{۱۰۰۰}{b}\Rightarrow ۰\leq CDF_x(b)\leq ۱$$

ج) $P(x \ge ۱۵۰۰) = \int_{۱۵۰۰}^{+\infty} \frac{۱۰۰۰}{z^۲} dz = \left[-\frac{۱۰۰۰}{z} \right]_{۱۵۰۰}^{+\infty} = \frac{۲}{۳}$

۲-۱۸) فرض کنید X متغیری تصادفی با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_x(z) = \begin{cases} ۰ & z < ۱۰ \\ e^{-(z-۱۰)} & z \ge ۱۰ \end{cases}$$

الف) عدد c را طوری تعیین کنید که احتمال بیشتربودن X از c معادل احتمال کمتر بودن آن از c باشد؛ ب) عدد d را طوری بیابید که احتمال تجاوز X از d مساوی ۰/۰۵ باشد.

پاسخ:

$$f_X(Z) = \begin{cases} ۰ & z < ۱۰ \\ e^{-(z-۱۰)} & z \ge ۱۰ \end{cases} \Rightarrow CDF_x(b) = \int_{۱۰}^{b} e^{۱۰-z} dz = \left[e^{۱۰-z} \right]_b^{۱۰} = ۱ - e^{۱۰-b} : b \ge ۱۰$$

الف) $\left. \begin{array}{l} P\{x \ge c\} + P\{x < c\} = ۱ \\ P\{x \ge c\} = P\{x < c\} \end{array} \right\} \Rightarrow P\{x < c\} = P\{x \ge c\} = \frac{۱}{۲} = F_x(c)$

$$\Rightarrow e^{۱۰-c} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow c = ۱۰ + Ln۲ = ۱۰/۶۹۳$$

ب) $P\{x > d\} = ۰/۰۵ \Rightarrow CDF_x(d) = ۰/۹۵ = ۱ - e^{۱۰-d} \Rightarrow e^{۱۰-d} = ۰/۰۵$

$$\Rightarrow ۱۰ - d = Ln(۰/۰۵) = -۳ \Rightarrow d = ۱۳$$

۲-۱۹) تابع چگالی اندازه های کدگذاری شده قطر رزوه های نوعی قطعه عبارت است از:

$$f_D(z) = \begin{cases} ۰ & z < ۰ \\ ۱/(۱+z)^۲ & z \ge ۰ \end{cases}$$

الف) احتمال بیشتر بودن D از ۲ را پیدا کنید؛ ب) CDF طبق کدام رابطه قابل محاسبه است؟

پاسخ:

الف) $f_D(z)=\frac{1}{(1+z)^2}, z\geq 0$

$$P\{X\geq 2\}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(1+z)^2}dz=\left[-\frac{1}{1+z}\right]_2^{+\infty}=\frac{1}{3}$$

ب) $F_D(b)=\int_0^b\frac{dz}{(1+z)^2}=\left.\frac{1}{1+z}\right]_0^b=1-\frac{1}{1+b};\ b\geq 0$

۲-۲۰) تابع چگالی متغیر تصادفی X مقاومت برشی نقطه جوشهای آزمایشی به شرح زیر است:

$$f_x(b)=\begin{cases} z/250000 & 0\leq z\leq 500\\ (1000-z)/250000 & 500<z\leq 1000\\ 0 & \end{cases}$$

عدد a را طوری تعیین کنید که رابطه $P\{X<a\}=0/50$ برقرار باشد. عدد b را طوری بیابید که رابطه $P\{X<b\}=0/90$ صادق باشد.

پاسخ:

$$f_k(z)=\begin{cases} \frac{z}{250000} & 0\leq z\leq 500\\ \frac{1000-z}{250000} & 500\leq z\leq 1000\\ & O.W. \end{cases}$$

الف)

$$F_k(b)=\begin{cases}\dfrac{b^۲}{۵۰۰۰۰۰} & ۰\le b\le ۵۰۰\\ ۱-\dfrac{(b-۱۰۰۰)^۲}{۵۰۰۰۰۰} & ۵۰۰\le b\le ۱۰۰۰\\ ۱ & ۱۰۰۰\le b\end{cases}$$

$$p(x<a)=F_x(a)=۰/۵\Rightarrow a=۵۰۰$$

ب)

$$P(x<b)=F_x(b)=۰/۹$$

از آنجا که می دانیم $F_x(۵۰۰)=۰/۵$ و می دانیم CDF ها غیر نزولی اند پس حتما $۵۰۰\le b<۱۰۰۰$ خواهد بود.

$$۱-\frac{(b-۱۰۰۰)^۲}{۵۰۰۰۰۰}=۰/۹\Rightarrow b=۷۷۶/۲۹۳$$

۲-۲۱) تابع چگالی متغیر تصادفی X، قطر پرداخت شده کابل مسلح برق به شرح زیر است:

$$f_x(z)=\begin{cases}(z-۰/۷۰)/a & ۰/۷۰\le z\le ۰/۷۵\\ (۰/۸۰-z)/a & ۰/۷۵<z\le ۰/۸۰\\ ۰ & \end{cases}$$

عدد a و $F_x(۰/۸۵),F_x(۰/۷۹)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_x(z)=\begin{cases}\dfrac{z-۰/۷}{a} & ۰/۷\le z\le ۰/۷۵\\[2mm] \dfrac{۰/۸-z}{a} & ۰/۷۵\le z\le ۰/۸۰\\[2mm] ۰ & O.W.\end{cases}$$

$$F_x(b)=\begin{cases}۰ & b<۰\\[2mm] \dfrac{(b-۰/۷)^{۲}}{۲a} & ۰/۷\le b\le ۰/۷۵\\[2mm] \dfrac{۲/۵}{a}\times ۱۰^{-۳}-\dfrac{(۰/۸-b)^{۲}}{۲a} & ۰/۷\le b\le ۰/۸\\[2mm] & ۰/۸<b\end{cases}$$

$$F_x(۰/۸)=\frac{۲/۵\times ۱۰^{-۳}}{a}-۰=۱\Rightarrow a=۲/۵\times ۱۰^{-۳}$$

$$F_x(۰/۷۹)=۱-\frac{(۰/۰۱)^{۲}}{۵\times ۱۰^{-۳}}=۰/۹۸$$

$$F_x(۰/۸۵)\overset{۰/۸<۰/۸۵}{=}۱$$

۲-۲۲) فرض کنید متغیر تصادفی X معرف عمر یک لامپ برحسب ساعت باشد. تابع تجمعی به شرح زیر است:

$$F_x(b)=\begin{cases}(۱-k/b), & b\ge ۱۰۰۰\\ ۰ & b<۱۰۰۰\end{cases}$$

الف) مقدار k را پیدا کنید؛ ب) تابع چگالی متغیر تصادفی X چیست؟ ج) احتمال کارکرد لامپ بیش از ۱۵۰۰ ساعت چقدر است؟

پاسخ:

$$F_x(b)=\begin{cases}(۱-\dfrac{k}{b}), & b\ge ۱۰۰۰\\[2mm] ۰, & b<۱۰۰۰\end{cases}$$

الف) $F_x(1000)=1-\frac{k}{1000}=0\Rightarrow k=1000$

ب) $f_x(z)=\frac{dF_x(b)}{db}\Rightarrow f_x(z)=\begin{cases}0 & b<1000\\ \frac{1000}{z^2} & b\geq 1000\end{cases}$

ج) $P\{x>1500\}=1-F_x(1500)=1-(1-\frac{1000}{1500})=\frac{2}{3}$

۲-۲۳) فرض کنید X متغیری تصادفی با CDF زیر است:

$$F_x(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ (b/\theta)^2 & 0\leq b\leq\theta\\ 1 & b>\theta\end{cases}$$

که θ مقدار ثابت نامشخصی است. الف) چه مقدار (یا مقادیری) از θ باعث می شود که $F_x(b)$ یک CDF واقعی باشد؟ ب) $P\{X>1\}$ را پیدا کنید؛ ج) تابع چگالی X را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) $0\leq F_x(b)\leq 1\Rightarrow 0\leq(\frac{b}{\theta})^2\leq 1\Rightarrow 0\leq b\leq\theta\Rightarrow 0<\theta$

ب) $P(x>1)=1-F_x(1)=\begin{cases}1-\frac{1}{\theta^2} & 1\leq\theta\\ 0 & \theta<1\end{cases}$

ج) $0\leq b\leq\theta,\theta>0\Rightarrow 0\leq\frac{b}{\theta}\leq 1\Rightarrow 0\leq(\frac{b}{\theta})^2\leq 1$

$f_x(z)=\frac{dF_x(b)}{db}=\frac{2b}{\theta^2},0\leq b\leq\theta\Rightarrow 0\leq\frac{2b}{\theta^2}\leq\frac{2}{\theta}$

توجه داشته باشید که برای تابع چگالی پیوسته دیگر برقراری رابطه $f_x(z) \le ۱$ لازم نیست. تنها لازم است که $f_x(z) \ge ۰$ باشد که این شرط معادل غیرنزولی بودن CDF است.

$$f_x(z) = \begin{cases} ۰ & z < ۰ \\ \dfrac{۲b}{\theta^۲} & ۰ \le z \le \theta \\ ۰ & z > \theta \end{cases}$$

۲-۲٤) تابع چگالی متغیر تصادفی X به شرح زیر است:

$$f_x(z) = \begin{cases} Kz(۱-z) & ۰ \le z \le ۱ \\ ۰ & \end{cases}$$

الف) مقدار K را طوری تعین کنید که $f_X(z)$ یک تابع چگالی حقیقی باشد؛ ب) CDF را پیدا کنید.

پاسخ:

الف و ب) $f_x(z) = \begin{cases} kz(۱-z) & ۰ \le z \le ۱ \\ ۰ & O.W. \end{cases} \Rightarrow F_x(b) = \begin{cases} ۰ & b < ۰ \\ kb^۲\left(\dfrac{۳-۲b}{٦}\right) & ۰ \le b \le ۱ \\ ۱ & b > ۱ \end{cases}$

$$\lim_{b \to \infty} F_x(b) = ۱ \Rightarrow F_x(۱) = \frac{k}{٦} \Rightarrow k = ٦$$

اما به منظور اینکه تابع $F_x(b)$ شرایط یک CDF پیوسته را برآورده کند، باید $۰ \le F_x(b) \le ۱$ بنابراین:

$$\frac{\partial F_x(b)}{\partial b} = \frac{d(۳b^۲ - ۲b^۳)}{db} = ٦(b - b^۲) = ٦b(۱-b) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} b = ۰ \\ b = ۱ \end{cases}$$

$F_x(۰) = ۰ \ \min; \ F_x(۱) = ۱ \ \max$

۲-۲۵) تابع چگالی متغیر تصادفی X عبارت است از:

$$f_x(b)=\begin{cases}K(z/\theta)^{۲} & ۰\le z\le\theta\\ ۰ & \end{cases}$$

الف) K را طوری تعیین کنید که $f_X(z)$ یک تابع چگالی حقیقی باشد؛ ب) CDF را پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_x(z)=\begin{cases}k(\frac{z}{\theta})^{۲} & ۰\le z\le\theta\\ ۰ & O.W.\end{cases}$$

الف) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_x(z)dz=۱\Rightarrow\int_{۰}^{\theta}k(\frac{z}{\theta})^{۲}dz=k\left[\frac{z^{۳}}{۳\theta^{۲}}\right]_{۰}^{\theta}=k(\frac{\theta}{۳})=۱\Rightarrow k=\frac{۳}{\theta}$

ب) $F_x(b)=\begin{cases}۰ & b<۰\\ \frac{kb^{۳}}{۳\theta^{۲}}=(\frac{b}{\theta})^{۳} & ۰\le b\le\theta\\ ۱ & \theta<b\end{cases}$

۲-۲۶) متغیر تصادفی X، معرف وزن یک کالا بر حسب اونس و دارای تابع چگالی زیر است:

$$f_x(z)=\begin{cases}(z-۸) & ۸\le z\le ۹\\ (۱۰-z) & ۹<z\le ۱۰\\ ۰ & \end{cases}$$

الف) میانگین و واریانس متغیر تصادفی X را پیدا کنید؛ ب) تولید کننده کالای فوق را به قیمت ثابت ۲ واحد پول می فروشد. او تضمین می کند که قیمت کالا را به هر خریداری که وزن کالایش از ۸/۲۵ اونس کمتر شود بپردازد. هزینه تولید او از طریق

رابطه $(\cdot/\cdot\text{٥}X+\cdot/\text{٣}\cdot)$ با وزن کالا مرتبط است. متغیر تصادفی سود، P، را بر حسب متغیر تصادفی X بیان کنید؛ یعنی، $h(X)$ را طوری بیابید که $P=h(X)$ باشد؛ ج) امید ریاضی سود هر واحد کالا را پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_x(z)=\begin{cases}(z-\text{٨}) & \text{٨}\le z\le \text{٩}\\ (\text{١}\cdot-z) & \text{٩}\le z\le \text{١}\cdot\\ \cdot & O.W\end{cases}$$

الف) $E(x)=\int_{\text{٨}}^{\text{٩}} z(z-\text{٨})dz+\int_{\text{٩}}^{\text{١}\cdot} z(\text{١}\cdot-z)dz \qquad (r_\text{١}=z-\text{٨}, r_\text{٢}=\text{١}\cdot-z)$

$$=\int_\cdot^\text{١}(r_\text{١}+\text{٨})r_\text{١}dr_\text{١}+\int_\cdot^\text{١}(\text{١}\cdot-r_\text{٢})r_\text{٢}dr_\text{٢}=\int_\cdot^\text{١}(r^\text{٢}+\text{٨}r+\text{١}\cdot r-r^\text{٢})dr$$

$$=\left[\text{٩}r^\text{٢}\right]_\cdot^\text{١}=\text{٩}$$

$$\sigma_x^\text{٢}=E(x-\text{٩})^\text{٢}=\int_\text{٨}^\text{٩}(z-\text{٩})^\text{٢}(z-\text{٨})dz+\int_\text{٩}^{\text{١}\cdot}(z-\text{٩})^\text{٢}(\text{١}\cdot-z)dz \qquad (r_\text{١}=\text{٩}-z, r_\text{٢}=z-\text{٩})$$

$$=\int_{-\text{١}}^{\cdot} r_\text{١}^\text{٢}(\text{١}-r_\text{١})(-dr_\text{١})+\int_\cdot^\text{١} r_\text{٢}^\text{٢}(-r_\text{٢}+\text{١})dr_\text{٢}=\text{٢}\int_\cdot^\text{١} r^\text{٢}(\text{١}-r)dr=$$

$$\text{٢}\left[\frac{r^\text{٣}}{\text{٣}}-\frac{r^\text{٤}}{\text{٤}}\right]_\cdot^\text{١}=\frac{\text{١}}{\text{٦}}$$

ب) $P=h(x)=\begin{cases}-\cdot/\cdot\text{٥}x-\cdot/\text{٣}\cdot\,, & x<\text{٨}/\text{٢٥}\\ \text{٢}-\cdot/\cdot\text{٥}x-\cdot/\text{٣}\cdot, & x\ge \text{٨}/\text{٢٥}\end{cases}$

ج) $E(h(x))=\int_\text{٨}^{\text{٨}/\text{٢٥}}(-\cdot/\cdot\text{٥}z-\cdot/\text{٣})f_x(z)dz+\int_{\text{٨}/\text{٢٥}}^{\text{١}\cdot}(\text{٢}-(\cdot/\cdot\text{٥}z+\cdot/\text{٣}))f_x(z)dz$

$$=E[\text{٢}-\cdot/\cdot\text{٥}z-\cdot/\cdot\text{٣}]-\int_\text{٨}^{\text{٨}/\text{٢٥}}\text{٢}f_x(z)dz=E[\text{١}/\text{٧}-\cdot/\cdot\text{٥}z]-$$

$$\int_\text{٨}^{\text{٨}/\text{٢٥}}\text{٢}(z-\text{٢})dz=\text{١}/\text{٧}-\frac{\text{٩}}{\text{٢}\cdot}+\text{٤}-(\text{٨}/\text{٢٥})^\text{٢}+(\text{٨})^\text{٢}=\text{١}/\text{١٨٧٥}$$

۲-۲۷) یک ماشین کالایی می سازد که پیش از حمل، صد در صد آن مورد بازرسی قرار می گیرد. ابزار سنجش طوری است که خواندن مقادیر کدگذاری شده بین ۱ و $1\frac{1}{3}$ برای آن دشوار است. پس از انجام بازرسی، تابع چگالی ویژگی مورد سنجش به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_x(z)=\begin{cases} kz^2 & 0\le z\le 1 \\ 1 & 1<z\le 1\frac{1}{3} \\ 0 & \end{cases}$$

الف) مقدار k را پیدا کنید؛ ب) چند درصد از اقلام در خارج از فاصله صفر تا یک قرار می گیرند؟ ج) میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_x(z)=\begin{cases} kz^2 & 0\le z\le 1 \\ 1 & 1\le z\le \frac{4}{3} \\ 0 & O.W. \end{cases} \Rightarrow F_x(b)=\begin{cases} 0 & b<0 \\ \frac{kb^3}{3} & 0\le b\le 1 \\ b+\frac{k}{3}-1 & 1\le b\le \frac{4}{3} \\ 1 & b>\frac{4}{3} \end{cases}$$

الف) $\lim\limits_{b\to\infty} F_x(b)=1 \Rightarrow F_x(\frac{4}{3})=\frac{k+1}{3}=1\Rightarrow k=2$

ب) $P(x<0\cup x>1)=P(x<0)+P(x>1)=0+P(x>1)=1-F_x(1)$

$=\frac{1}{3}\approx 33\%$

ج) $E(x)=\int_0^1 2z^3dz+\int_1^{\frac{4}{3}} zdz=\left[\frac{z^4}{2}\right]_0^1+\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^{\frac{4}{3}}\approx 0/889$

$$E(x^{۲}) = \int_{۰}^{۱} ۲z^{٤}dz + \int_{۱}^{\frac{٤}{۳}} z^{۲}dz = \left[۰/٤z^{۵}\right] + \left[\frac{z^{۳}}{۳}\right]_{۱}^{\frac{٤}{۳}} \approx ۰/۸۵۷$$

$$\Rightarrow \delta^{۲} = E(x^{۲}) - E(x)^{۲} \approx ۰/۰٦٦$$

۲-۲۸) قضیه محور موازی را برای یک متغیر تصادفی گسسته ثابت کنید.

پاسخ:

$$\sum_{i=۱}^{\infty} P(x = x_i) = ۱$$

$$E\left[(x-\mu)^{۲}\right] = E\left[x^{۲} - ۲\mu x + \mu^{۲}\right]$$

$$E\left[(x-\mu)^{۲}\right] = \sum_{i=۱}^{n} (x_i - \mu)^{۲} f_x(x_i) = \sum_{i=۱}^{n} \left((x_i - a) - (\mu - a)\right)^{۲} f_x(x_i)$$

$$= \sum_{i=۱}^{n} (x_i - a)^{۲} f_x(x_i) - ۲(\mu - a)\sum_{i=۱}^{n} (x_i - a) f_x(x_i) + \sum_{i=۱}^{n} (\mu - a)^{۲} f_x(x_i)$$

$$= E\left[(x-a)^{۲}\right] - ۲(\mu - a)(E(x_i) - a) + (\mu - a)^{۲}$$

$$\Rightarrow E\left[(x-\mu)^{۲}\right] = E\left[(x-a)^{۲}\right] - ۲(\mu - a)^{۲} + (\mu - a)^{۲} = E\left[(x-a)^{۲}\right] - (\mu - a)^{۲}$$

از آنجا که این رابطه برای هر متغیر گسسته اثبات شد پس برای $y = x - a$ داریم:

$$\sigma_y^{۲} = E(y^{۲}) - \mu_y^{۲} = E\left[(x-a)^{۲}\right] - (\mu_x - a)^{۲} \quad ; \ (\mu_y = \mu_x - a)$$

۲-۲۹) $E(X)$، $E(X^{۲})$، $E(X-\mu)^{۲}$ را برای متغیر تصادفی مساله ۱ پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(x) = \sum_{i=۱}^{۲} x_i p(x_i) = (۰ + ۱) \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$E(x^{۲}) = \sum_{i=۱}^{۲} x_i p(x_i) = (۰ + ۱^{۲}) \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - E(x)^2 = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

۲-۳۰) $E(X)$، $E(X^2)$، $E(X-\mu)^2$ را برای متغیر تصادفی مساله ۳ پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(x) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = 0 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - E(x)^2 = \frac{7}{6} - (\frac{5}{6})^2 = \frac{17}{36}$$

۲-۳۱) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۵ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(x) = \sum x_i p(x_i) = 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} = \frac{108}{216} = 0/5$$

$$E(x^2) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{2}{3} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{12}$$

۲-۳۲) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۷ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(x_i) = 1/5$$

$$E(x^2) = \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow \sigma_x^2 = 3 - (1/5)^2 = 0/75$$

۲-۳۳) الف) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۸ را پیدا کنید؛ ب) متغیر تصادفی Y (سود کل) را بر حسب متغیر تصادفی X (تعداد اقلام ناقص) در مساله ۷ بیان کنید؛ یعنی تابع $h(X)$ را طوری بیابید که $Y = h(X)$ باشد؛ ج) با

استفاده از تابع احتمال به دست آمده در مساله ۷، یعنی $P_X(k)$، امید ریاضی $h(X)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) $E(y)=\sum_{i=1}^{4} y_i p(y_i) = -750\times\frac{1}{8}+500\times\frac{3}{8}+1750\times\frac{3}{8}+3000\times\frac{1}{8}=\frac{9000}{8}$

$E(y^2)=\sum y_i^2 p(y_i)=2437500$

$\Rightarrow \sigma_y^2 = 2437500-(1125)^2=1171875$

ب) $y_x(k)=\begin{cases} 3000 & k=0 \\ 1750 & k=1 \\ 500 & k=2 \\ -750 & k=3 \end{cases}$ $\qquad y_x(k)=1000(3-k)-250k=3000-1250k$

ج) $E[h(x)]=E[y]=3000\times\frac{1}{8}+1750\times\frac{3}{8}+500\times\frac{3}{8}-750\times\frac{1}{8}=\frac{9000}{8}=1125$

۲-۳۴) میانگین و واریانس متغیر تصادفی مساله ۱۳ را پیدا کنید.

پاسخ:

$E(x)=(1+2)\times\frac{1}{6}+(3+6)\times\frac{1}{12}+(4+5)\times\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=3/5$

$E(x^2)=(1+4)\times\frac{1}{6}+(9+36)\times\frac{1}{4}+(16+25)\times\frac{1}{4}=\frac{5}{6}+\frac{15}{4}+\frac{41}{4}=\frac{89}{6}$

$\sigma_x^2=\frac{89}{6}-(\frac{7}{2})^2=\frac{31}{12}$

۲-۳۵) الف) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۱۵ را پیدا کنید؛ ب) نشان دهید که در مورد مساله ۱۵ رابطه $E(Y)=E[h(X)]$ برقرار است، که در آن تابع h جواب بخش (الف) مساله ۱۵ است.

پاسخ:

الف) $E(x)=(0+1+2+3+4+5)\times\frac{1}{6}=2.5$

$$E(x^2)=(0+1+4+9+16+25)\times\frac{1}{6}=\frac{55}{6}\Rightarrow\sigma_x^2=\frac{55}{6}-(\frac{5}{2})^2=2.92$$

ب) $y=\begin{cases}1000x, & x\le 4\\ 4000, & x=5\end{cases}$

$$E(y)=\sum h(x)f_x(x)=\frac{1}{6}(1000+2000+3000+4000+4000)=\frac{7}{3}\times10^3$$

۲-۳۶) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۱۶ را پیدا کنید.

پاسخ:

تابع f نمایی است، بنابراین میانگین و انحراف معیار آن برابر θ است.

$$E(x)=\theta=0.04$$

$$\sigma_x^2=\theta^2=1.6\times10^{-3}$$

۲-۳۷) نشان دهید که میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۱۷ متناهی نیست.

پاسخ:

$$E(x)=\int_{1000}^{\infty} z.\frac{1000}{z^2}dz=1000\int_{1000}^{\infty}\frac{dz}{z}=1000[Lnz]_{1000}^{+\infty}$$ واگراست

$$E(x^2)=\int_{1000}^{+\infty} z^2.\frac{1000}{z^2}dz=[1000z]_{1000}^{+\infty}$$ واگراست

به طور واضح $\sigma_x^2=E(x^2)-E(x)^2$ و از آنجا که در $E(x)$ عبارت $Ln(\infty)$ ظاهر می شود، ولی در $E(x)^2$ فاکتور ∞ ظاهر می شود، بعلت رشد نمایی آن و متفاوت بودن سرعت رشد آنها، واریانس X نیز واگراست.

۲-۳۸) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۱۸ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(x)=\int_{10}^{\infty} ze^{-(z-10)}dz=\int_{0}^{\infty}(U+10)e^{-u}du=\int_{0}^{\infty}ue^{-u}du+10\int_{0}^{\infty}e^{-u}du$$

$$=1+10\times1=11 \qquad u=z-10 \text{ و } \theta=1 \text{ تابع نمایی با پارامتر } = e^{-u}$$

$$\sigma_x^2=\int_{10}^{\infty}(z-11)^2e^{-(z-10)}dz=\int_{0}^{\infty}(u-1)^2e^{-u}du=\sigma_u^2=1$$

۲-۳۹) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۱۹ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(x)=\int_{0}^{\infty}\frac{zdz}{(1+z)^2}=\int_{0}^{+\infty}\frac{dz}{(1+z)}-\int_{0}^{+\infty}\frac{dz}{(1+z)^2}=[Ln(z+1)]_0^{+\infty}+\left[\frac{1}{1+z}\right]_0^{+\infty}$$

$=Ln(\infty)-1$ واگراست

$$E(x^2)=\int_{0}^{\infty}\frac{z^2dz}{(1+z^2)}=\int_{0}^{+\infty}\frac{(z+1)^2-(1+2z)}{(1+z)^2}dz=\int_{0}^{\infty}dz-2\int_{0}^{\infty}\frac{dz}{1+z}+\int_{0}^{\infty}\frac{dz}{(1+z)^2}$$

$=[Z]_0^{\infty}+2[Ln(1+z)]_0^{\infty}-\left[\frac{1}{1+z}\right]_0^{\infty}=\infty+1-2Ln\infty$ واگراست

۲-۴۰) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۲۰ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_k(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{250000} & 0\le z\le 500\\[2mm] \dfrac{1000-z}{250000} & 500\le z\le 1000\\[2mm] 0 & O.W.\end{cases}$$

$$E(x)=\int_{0}^{500} zf_x(z)dz+\int_{500}^{1000} zf_x(z)dz$$

تغییر متغیر $r=\frac{z-500}{500} \Rightarrow E(x)=\int_{-1}^{0}500(r+1)(r-1)dr+\int_{0}^{1}500(1-r)(r+1)dr$

$$=([\frac{1}{3}(r+1)^3]_{-1}^{0}+[r-\frac{r^3}{3}]_{0}^{1})=500$$

نکته: از آنجا که $f_x(z)=f_x(1000-z)$ بنابراین مقادیر f حول $z=500$ متقارن است،

بنابراین میانگین $E(x)=500$است.

$$\sigma_x^2=\int_{0}^{500}(z-500)^2 f_x(z)dz+\int_{500}^{1000}(z-500)^2 f_x(z)dz$$

$$=\int_{-1}^{0}500^2 r^2(r+1)dr+\int_{0}^{1}500^2 r^2(1-r)dr=500^2([\frac{r^4}{4}+\frac{r^3}{3}]_{-1}^{0}+[\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}]_{0}^{1})$$

$$=500^2([-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}]+[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}])=\frac{500^2}{6}$$

۲-۴۱) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۲۱ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$r=z-0.75$$

$$\Rightarrow E(r)=\int_{-0.05}^{0}(r+0.75)(\frac{r+0.05}{2.5\times10^{-3}})dr+\int_{0}^{0.05}(r+0.75)(\frac{0.05-r}{2.5\times10^{-3}})dr$$

از انجا که $f_x(z)=f_x(0.80-z)$است، بنابراین تابع چگالی حول $z=0.75$ متقارن است، بنابراین داریم:

$$E(x)=500 \quad \Rightarrow E(r)=E(z-0.75)=0 \quad \Rightarrow E(z)=0.75$$

$$\sigma_x^2=\int_{0.70}^{0.75}(z-0.75)^2(\frac{z-0.70}{2.5\times10^{-3}})dz+\int_{0.75}^{0.80}(z-0.75)^2(\frac{0.80-z}{2.5\times10^{-3}})dz$$

$$=\int_{-0.05}^{0}r^2(\frac{r+0.05}{2.5\times10^{-3}})dr+\int_{0}^{0.05}r^2(\frac{0.05-r}{2.5\times10^{-3}})dr$$

$$=\frac{1}{2.5\times10^{-3}}([\frac{r^4}{4}+\frac{0.05}{3}r^3]_{-0.05}^{0}+[\frac{0.05}{3}r^3-\frac{r^4}{4}]_{0}^{0.05})=\frac{2.5\times10^{3}}{6}$$

۲-۴۲) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۲۲ را پیدا کنید.

پاسخ:

این مسئله مانند مسئله ۳۹ است، بنابراین در اینجا نیز σ_x^2, μ_x واگرایند.

۲-۴۳) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۲۳ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(x) = \int_0^\theta \frac{2b^2}{\theta^2} db = \left[\frac{2b^3}{3\theta^2}\right]_0^\theta = \frac{2\theta}{3}$$

$$E(x^2) = \int_0^\theta \frac{2b^3}{\theta^2} db = \left[\frac{b^4}{2\theta^2}\right]_0^\theta = \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{\theta^2}{18}$$

۲-۴۴) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۲۴ را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به نکته ی ذکر شده در مسئله ۴۰ خواهیم داشت:

$$f_x(z) = f_x(1-z)\ ; 0 \le z \le 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = 0/5 \Rightarrow \mu_x = 0/5$$

$$E(x^2) = \int_0^1 6z^2(1-z)dz = [\frac{3z^4}{2} - 1/2z^5]_0^1 = 0/3 \Rightarrow \sigma_x^2 = 0/3 - 0/25 = 0/05$$

۲-۴۵) میانگین و واریانس متغیر تصادفی موضوع مساله ۲۵ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(x) = \int_0^\theta \frac{3z^3}{\theta^3} dz = \frac{3}{4}\theta$$

$$E(x^2) = \int_0^\theta \frac{3z^4}{\theta^3} dz = \frac{3}{5}\theta^2 \Rightarrow \sigma_x^2 = (\frac{3}{5} - \frac{9}{16})\theta^2 = \frac{3\theta^2}{80}$$

۲-۴۶) بر اساس نتایج مساله ۲۹، $E(2X)$ و واریانس ۲X را پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(۲x) = ۲E(x) = ۱$$

$$\sigma^{۲}(۲x) = ٤\sigma_x^{۲} = ۱$$

۲-٤۷) بر اساس نتایج مساله ۳٦، $E(۳X)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(۳x) = ۳E(x) = ۰/۱۲$$

۲-٤۸) اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته مثبت باشد، یعنی به ازای $z < ۰$ رابطه $f_X(z) = ۰$ برقرار باشد، درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$E(X) = \int_{۰}^{\infty} [(۱ - F_X(b)] db$$

که $F_X(b)$ در آن CDF متغیر تصادفی X است.

پاسخ:

$$f(x)dx = dF_x(b)$$

$$\int_{۰}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{۰}^{+\infty} xdF_x(b) = [xF_x(b)]_{۰}^{+\infty} - \int_{۰}^{+\infty} F_x(b)db$$

از آنجا که $F_x(۰) = ۰$ و $F_x(+\infty) = ۱$ است، بنابراین: $[xF_x(b)]_{۰}^{+\infty} = [x]_{۰}^{+\infty} = \int_{۰}^{+\infty} dx$

از آنجا نتیجه می شود که:

$$E(x) = \int_{۰}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{۰}^{+\infty} dx - \int_{۰}^{+\infty} F_x(b)db = \int_{۰}^{+\infty} (۱ - F_x(b))db$$

۲-۴۹) فرض کنید X یک متغیر تصادفی، با تابع چگالی پیوسته $f_x(z)$ است، که در آن $f_x(z)$ حول عددی مانند a متقارن است؛ یعنی، $f_x(z+a)=f_x(a-z)$ ثابت کنید $E(X)=a$ است.

پاسخ:

$$f_x(a+z)=f_x(a-z) \Rightarrow E(x)=\int_{۰}^{+\infty}(a-z)f_x(a-z)dz+\int_{۰}^{+\infty}(a+z)f_x(a+z)dz$$

$$\Rightarrow E(x)=\int_{۰}^{+\infty}(a-z)f_x(a+z)+\int_{۰}^{+\infty}(a+z)f_x(a+z)=۲a\int_{۰}^{+\infty}f_x(a+z)dz=a$$

۲-۵۰) CDF متغیر تصادفی موضوع مساله ۱۶ عبارت است از:

$$F_X(b)=\begin{cases} ۰ & b<۰ \\ ۱-e^{-b/۰/۰۴} & b\geq ۰ \end{cases}$$

متغیر تصادفی $Y=\ln X$ را در نظر بگیرید و تابع چگالی آن را پیدا کنید.

راهنمایی: باید توجه داشت که CDF متغیر تصادفی Y طبق رابطه زیر تعیین می شود:

$$F_Y(b)=P\{Y\leq b\}=P\{\ln X\leq b\}=P\{X\leq e^b\}$$

پاسخ:

$$f_x(z)=\frac{dF_x(b)}{db}\Rightarrow f_x(z)=\begin{cases} ۰ & z<۰ \\ \frac{۱}{۰/۰۴}e^{-\frac{z}{۰/۰۴}} & z\geq ۰ \end{cases}$$

$$F_y(y)=p\{Y\leq y\}=p\{Lnx\leq y\}=p\{x\leq e^y\}=F_x(e^y)=۱-e^{\frac{-e^y}{۰/۰۴}}$$

$$f_y(z)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{e^y}{۰/۰۴}e^{-\frac{e^y}{۰/۰۴}}=\frac{۱}{۰/۰۴}e^{(y-\frac{e^y}{۰/۰۴})}$$

۲-۵۱) فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع تجمعی $F_X(b)$ است. Y را مساوی با $F_X(X)$ بگیرید. نشان دهید که Y طبق یک تابع چگالی راست گوشه ای، تعریف می شود یعنی

$$f_Y(z)=\begin{cases}۱ & ۰\le z\le ۱\\ ۰ & \end{cases}$$

راهنمایی: باید توجه داشت که $F_Y(d)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$F_Y(d)=P\{Y\le d\}=P\{F_X(X)\le d\}=P\{X\le F_X^{-۱}(d)\}$$

پاسخ:

$$f_y(z)=\begin{cases}۱ & ۰\le z\le ۱\\ ۰ & O.W.\end{cases}$$

$$F_Y(d)=p(Y\le d)=p(F_X(x)\le d)=p(x\le F_x^{-۱}(d))=F_x(F_x^{-۱}(d))=d$$

$$\frac{dF_Y(d)}{dd}=f_Y(y)=۱,\ ۰\le F_Y(y)\le ۱\quad\Rightarrow ۰\le y\le ۱\Rightarrow f_Y(z)=\begin{cases}۱ & ۰\le z\le ۱\\ ۰ & O.W.\end{cases}$$

۲-۵۲) تصور کنید که متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع تجمعی $F_X(b)$ است. متغیر تصادفی Y را مساوی با $(X-k)/a$ بگیرید، که $k,a>۰$ ثابت است. نشان دهید که CDF متغیر تصادفی Y طبق رابطه $F_Y(d)=F_X(ad+k)$ به دست می آید.

پاسخ:

$$Y=\frac{X-k}{a}\Rightarrow X=aY+k\Rightarrow dY=\frac{dX}{a}$$

$$F_Y(d)=\int_{-\infty}^{d}f_Y(k)dY=\int_{-\infty}^{ad+k}\frac{۱}{a}f_X(az+k)dx=F_X(ad+k)$$

۲-۵۳) متغیر تصادفی X را دارای توزیع ویبول میگویند، اگر CDF آن به شرح زیر باشد:

$$F_X(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ 1-e^{-(b/\alpha)^{\beta}} & b\ge 0,\alpha,\beta>0\end{cases}$$

الف) نشان دهید که این رده از توزیعها شامل توزیع نمایی نیز هست؛ ب) متغیر تصادفی Y را مساوی با X^{β} بگیرید. CDF متغیر تصادفی Y، یعنی $F_Y(d)$ را پیدا کنید.

راهنمایی:

$$F_Y(d)=P\{Y\le d\}=P\{X^{\beta}\le d\}=P\{X\le d^{1/\beta}\}$$

پاسخ:

الف) $B=1\Rightarrow F_x(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ 1-e^{-\frac{b}{\alpha}} & b\ge 0,\alpha>0\end{cases}$ CDF توزیع نمایی با پارامتر α

ب) $F_Y(d)=p(Y\le d)=p(X^{\beta}\le d)\overset{(X\ge 0)}{=}p(X\le\sqrt[\beta]{d})=1-e^{-\frac{d}{\alpha^{\beta}}}$

۲-۵٤) سفینه های بدون سرنشین پیاپی به فضا فرستاده می شوند تا زمانی که اولین پرتاب موفق صورت گیرد. اگر با پنج آزمایش اول موفقیت حاصل نشود، تجربه متوقف می شود تا دستگاهها مورد معاینه قرار گیرند. تصور کنید که آزمایشهای پیاپی مستقل از هم هستند و احتمال موفقیت هر آزمایش ثابت و معادل ۰/۸ است. فرض کنید که هزینه آزمایش اول معادل K واحد پول و هزینه آزمایشهای بعد معادل $K/3$ واحد پول است. هر گاه اولین پرتاب موفقیت آمیز روی دهد، مقداری اطلاعات

به دست می آید مبنی بر اینکه درآمدی مثلا برابر C واحد پول به دست آمده است. اگر هر پنج آزمایش به شکست بیانجامند، سودی از این رهگذر عاید نمی شود. الف) N را معرف تعداد آزمایشهایی بگیرید که تا کسب اولین موفقیت انجام می شوند. توزیع احتمال N، یعنی

$$P\{N=۱\}, P\{N=۲\}, P\{N=۳\}, P\{N=٤\}, P\{N=٥\}, P\{N>٥\}$$

را پیدا کنید. باید توجه داشت که $P\{N>٥\}$ معرف احتمال متوقف شدن تجربه بدون کسب موفقیت است؛ ب) اگر متغیر تصادفی T معرف هزینه خالص این تجربه باشد، تابع احتمال T را پیدا کنید؛ ج) $E(T)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

X متغیری تصادفی با توزیع هندسی می باشد. الف) $X(N>٥)=٦$

$$f_x(z)=\begin{cases}(۰/۲)^{z-۱}(۰/۸) & z=۱,۲,۳,٤,٥\\ ۱-\sum_{i=۱}^{٥}(۰/۲)^{i-۱}(۰/۸) & z=٦\end{cases}$$

Z	۱	۲	۳	٤	٥	٦
$f_x(z)$	۰/۸	۰/۱٦	۰/۰۳۲	$٦/٤\times۱۰^{-۳}$	$۱/۲\times۱۰^{-۳}$	$۳/۲\times۱۰^{-٤}$

ب)

Z	۱	۲	۳	٤	٥	٦
$T(z)$	$k-c$	$\frac{٤k}{۳}-c$	$\frac{٥k}{۳}-c$	$۲k-c$	$\frac{۷k}{۳}-c$	$\frac{۸k}{۳}$
$f_x(z)$	۰/۸	۰/۱٦	۰/۰۳۲	$٦/٤\times۱۰^{-۳}$	$۱/۲\times۱۰^{-۳}$	$۳/۲\times۱۰^{-٤}$

ج) $E(T)=1/0832k-c\times(1-3/2\times10^{-4})=1/0832k-0/99968c$

۲-۵۵) فرض کنید X_1,X_2 یک نمونه تصادفی دو تایی، با تابع تجمعی $F(b)$ و تابع چگالی $f(z)$ باشد. متغیر تصادفی Y را مساوی با $\max\{X_1,X_2\}$ بگیرید. نشان دهید که CDF متغیر تصادفی Y از رابطه $F_Y(d)=[F(d)]^2$ و تابع چگالی نظیر آن از رابطه $f_Y(z)=2f(z)F(z)$ به دست می آید.

راهنمایی: $F_Y(d)=P\{Y\le d\}=P\{X_1\le d,X_2\le d\}$

پاسخ:

$$p\{Y\le d\}=p\{x_1\le d\cap x_2\le d\}=p\{x_1\le d\}.p\{x_2\le d\}$$

$$F_y(d)=F(d).F(d)=[F(d)]^2$$

$$f_Y(z)=\frac{dF_Y(d)}{db}=\frac{d(F(d))^2}{dd}=2f(z).F(d)$$

۲-۵۶) اگر X_1,X_2 یک متغیر تصادفی دو بعدی باشد، صحت رابطه زیر را نشان دهید:

$$P\{a_1<X_1\le b_1,a_2<X_2\le b_2\}=F_{X_1X_2}(b_1,b_2)-F_{x_1x_2}(b_1,a_2)$$
$$-F_{x_1x_2}(a_1,b_2)+F_{x_1x_2}(a_1,a_2)$$

پاسخ:

$$F_{x_1x_2}(b_1,b_2)-F_{x_1,x_2}(b_1,a_1)-\left[F_{x_1x_2}(a_1,b_1)-F_{x_1,x_2}(a_1,a_2)\right]$$

$$=p(x_1\le b_1,a_2\le x_2\le b_2)-p(x_1\le a_1,a_2\le x_2\le b_2)=p(a_1\le x_1\le b_1,a_2\le x_2\le b_2)$$

۲-۵۷) اگر $h(X_1,X_2)=[X_1-E(X_1)][X_2-E(X_2)]$ باشد، $E[h(X_1,X_2)]=\sigma_{x_1x_2}$ را کوواریانس متغیر تصادفی X_1,X_2 می نامند. نشان دهید اگر X_1,X_2 متغیرهای تصادفی مستقل باشند، $\sigma_{x_1x_2}$ مساوی صفر است.

پاسخ:

$$h(x_1,x_2)=x_1x_2-\mu_{x_1}.x_2-\mu_{x_2}.x_1+\mu_{x_1}\mu_{x_2}$$

$$E(h(x_1,x_2))=E(x_1,x_2)-\mu_{x_1}E(x_2)-\mu_{x_2}E(x_1)+\mu_{x_1}\mu_{x_2}=E(x_1).E(x_2)$$

$$-\mu_{x_1}\mu_{x_2}-\mu_{x_2}.\mu_{x_1}+\mu_{x_1x_2}=0$$

x_1 و x_2 مستقل هستند $\Rightarrow f_{x_1x_2}(z_1,z_2)=f_{x_1}(z_1).f_{x_2}(z_2)$

$$\mu_{x_1x_2}=\begin{cases}\sum z_1\sum z_2 f_{x_1x_2}(z_1,z_2)=\sum z_1(\sum z_2 f_{x_2}(z_2))f_{x_1}(z)=\mu_{x_2}\sum z_1 f_{x_1}(z)=\mu_{x_1}\mu_{x_2}\\ \iint f_{x_1x_2}(z_1,z_2)z_1.z_2dz=\int z_2 f_{x_2}(z)(\int z_1 f_x(z_1)dz_1)dz_2=\mu_{x_1}\mu_{x_2}\end{cases}$$

۲-۵۸) اگر $h(X_1,X_2)=(X_1+X_2-[E(X_1)+E(X_2)]^2)$ باشد، صحت رابطه زیر را نشان دهید:

$$E[h(X_1,X_2)]=Var(X_1+X_2)$$

$$=VarX_1+VarX_2+2Cov(X_1,X_2)$$

پاسخ:

$$Y=h(x_1,x_2)=(x_1-\mu_{x_1})^2+(x_2-\mu_{x_2})^2+2(x_1-\mu_{x_1})(x_2-\mu_{x_2})$$

$$\text{var}(x_1+x_2)=\text{var}\,x_1+\text{var}\,x_2+2\text{cov}(x_1+x_2)$$

۲-۵۹) ضریب همبستگی X_1,X_2 به صورت زیر تعریف می شود.

$$\rho=\frac{E[X_1-E(X_1)][X_2-E(X_2)]}{\sqrt{E[X_1-E(X_1)]^2E[X_2-E(X_2)]^2}}=\frac{\sigma_{X_1,X_2}}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}$$

نشان دهید اگر $X_۱,X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند، $\rho=۰$ است.

پاسخ:

براساس سوال ۵۷، $x_۱,x_۲$ مستقل هستند بنابراین $\mathrm{cov}(x_۱,x_۲)=۰$

$$\rho_{x_۱,x_۲}=\frac{\mathrm{cov}(x_۱,x_۲)}{\sigma_{x_۱}\sigma_{x_۲}}=۰$$

۲–۶۰) یک متغیر تصادفی را در نظر بگیرید که به شرح زیر معرف عملکرد پرتاب یک ماهواره است: اگر پرتاب موفقیت آمیز باشد، نتیجه با عدد ۱ مشخص می شود. اگر پرتاب ناموفق باشد نتیجه با ۰ نشان داده می شود. احتمال یک پرتاب موفقیت آمیز با p مشخص می شود. الف) اگر واریانس این متغیر تصادفی $\frac{۱}{٤}$ باشد، مقدار p چقدر می شود؟ ب) اگر دو ماهواره به عنوان نمونه پرتاب شوند، تعداد موفقیتها با متغیر تصادفی $X_۱+X_۲$ ارائه می شود که در آن $X_۱$ عملکرد ماهواره اول و $X_۲$ عملکرد ماهواره دوم را نشان می دهد. چنانکه در بالا ذکر شد، $X_۱,X_۲$ هر یک برحسب موفقیت آمیز بودن یا نبودن پرتاب، مقادیر ممکن ۱ یا صفر را می گیرند. امید ریاضی تعداد موفقیتها (برحسب p) چقدر است؟

پاسخ:

صورت مساله توزیع دو جمله ای با پارامترهای p,n را بررسی می کند.

هر گاه x توزیع دوجمله ای داشته باشد داریم:

$$\begin{cases} E(x)=np \\ \mathrm{var}(x)=np(۱-p) \end{cases}$$

الف) $n=۱ \Rightarrow \sigma_x^۲=p(۱-p)=\frac{۱}{٤} \Rightarrow p=۰/۵$

ب) $n = ۲ \Rightarrow \mu_x = ۲p = ۱$

۲-۶۱) در مساله ۱، متغیر تصادفی دیگری به علامت Y به شرح زیر تعریف می کنیم:

$$Y(w_۱) = ۱ \quad , Y(w_۲) = ۲, \quad Y(w_۳) = ۳$$

الف) تابع احتمال توام X,Y را پیدا کنید؛ ب) تابع احتمال حاشیه ای Y را پیدا کنید؛ ج) امید ریاضی Y را پیدا کنید.

پاسخ:

الف و ب)

x \ y	۱	۲	۳
۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	–
۱	–	–	$\frac{۱}{۲}$
$f_Y(y)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$

ج) $E(y) = \sum_{i=۱}^{۳} y_i p_Y(y_i) = \frac{۱}{۶} + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۲} = \frac{۷}{۳}$

۲-۶۲) در مساله ۱۵ یک بندرگاه دوم را برای پاسخگویی به مازاد تقاضای احتمالی در نظر بگیرید. تعداد کشتیهایی را که تقاضا پهلوگیری در این بندرگاه را دارند با Z نشان دهید (این تقاضا تنها زمانی مطرح می شودکه بندرگاه اول پر باشد). الف) تابع احتمال توام X,Z را پیدا کنید؛ ب) تابع احتمال حاشیه ای Z را پیدا کنید؛ ج) $E(Z)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

الف و ب)

Z \ X	۰	۱	۲	۳	٤	٥	$f_z(z)$
۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	۰	$\frac{5}{6}$
۱	۰	۰	۰	۰	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ج) $E(z) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

۲-٦۳) محصولی را بر حسب تعداد نقصهای آن وکارخانه سازنده آن رده بندی می کنیم. فرض می کنیم X_1, X_2 متغیرهای تصادفی و به ترتیب معرف تعداد نقصها در واحد محصول (با مقادیر ممکن صفر، ۱، ۲ یا ۳) و شماره کارخانه (با مقادیر ممکن ۱ یا ۲) باشند. مندرجات جدول زیر معرف تابع احتمال توام X_1, X_2 است، مثلا $P_{X_1X_2}(0,1) = \frac{1}{8}$.

X_1 \ X_2	۱	۲
۰	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

۱	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
۲	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
۳	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

الف) توابع احتمال حاشیه ای X_1, X_2 را پیدا کنید؛ ب) $E(X_1)$، $E(X_2)$، واریـانس X_1 و واریانس X_2 را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) $$P_{x_1}(k)=\begin{cases}\frac{3}{16} & k=0\\ \frac{1}{8} & k=1\\ \frac{5}{16} & k=2\\ \frac{3}{8} & k=3\end{cases} \qquad P_{x_2}(k)=\begin{cases}\frac{1}{2} & k=1\\ \frac{1}{2} & k=2\end{cases}$$

ب)

$$E(x_1)=\frac{15}{8} \qquad E(x_2)=\frac{3}{2}$$

$$E(x_1^2)=\frac{38}{8} \qquad E(x_2^2)=\frac{5}{2}$$

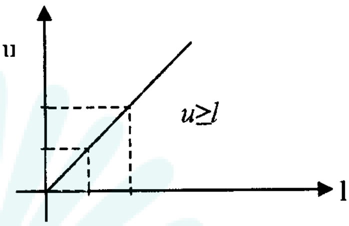
$$\sigma_{x_1}^2=\frac{38}{8}-\left(\frac{15}{8}\right)^2=\frac{79}{64} \qquad \sigma_{x_2}^2=\frac{5}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

۲-٦٤) مدت کارکرد دو لامپ خلا مورد آزمـایش قـرار مـی گیـرد. فـرض کنیـد مـدت کارکرد لامپی را که عمر آن کوتاهتر است با X_L و مدت کارکرد لامپی را که عمـر آن بلندتر است با X_U مشخص می کنیم. تابع چگالی توام دو لامپ عبارت است از:

$$f_{X_L X_U}(l,u)=\begin{cases}\dfrac{2}{(100)^2}e^{-(l/100+u/100)} & 0<l<u\\ 0\end{cases}$$

توابع چگالی حاشیه ای X_L و X_U را پیدا کنید.

پاسخ:



$$f_{x_L}(l)=\int_l^{\infty}\frac{2}{10^4}e^{-(\frac{l+u}{100})}du=\frac{2e^{-0.01l}}{10^4}\int_l^{+\infty}e^{-0.01u}du$$

$$=\frac{2e^{-0.01l}}{10^4}\left[-100e^{-0.01u}\right]_l^{+\infty}=0.02e^{-0.02l}$$

$$f_{k_u}(u)=\int_0^u\frac{2e^{-0.01(l+u)}}{10^4}dl=\frac{2e^{-0.01u}}{10^2}\left[-e^{-0.01l}\right]_0^u=0.02e^{-0.01u}(1-e^{-0.01u})$$

۲-٦٥) ابعاد یک میز مستطیل شکل را ثبت می کنیم. فرض کنید Y,X معرف خطاهای اندازه گیری با توزیع توام $-\infty\le u,v\le+\infty$ $f_{XY}(u,v)=\frac{1}{2\pi}e^{-[u^2+v^2]/2}$ است. الف) توابع چگالی حاشیه ای X,Y را پیدا کنید؛ ب) $E(X)$ و واریانس X را پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}}}{2\pi}dv=\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dv=\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$f_y(v)=\frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

در واقع $f_x(u)$ و $f_y(v)$ توزیع نرمال استاندارد و $f_{xy}(u,v)$ دارای توزیع نرمال توام است.

$$\text{ب)}\ X,Y \sim N(\cdot,\text{۱}) \Rightarrow \begin{cases} \mu_x = \mu_y = \cdot \\ \sigma_x^{\text{۲}} = \sigma_y^{\text{۲}} = \text{۱} \end{cases}$$

۲-۶۶) یک المان سوختی با قطر D در داخل لوله ای با قطر T قرار می گیرد. تابع چگالی توام عبارت است از:

$$f_{DT} = \begin{cases} \text{۱۰۰}, & \text{۱/۹۵} \le u \le \text{۲/۰۵} \\ & \text{۲/۰۰} \le u \le \text{۲/۱۰} \\ \cdot & \end{cases}$$

الف) چگالیهای حاشیه ای T,D را پیدا کنید؛ ب) $E(D)$، $E(T)$، واریانس D، و واریانس T را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\text{الف)}\ f_D(u) = \int_{\text{۲}}^{\text{۲/۱}} \text{۱۰۰}\, dv = \text{۱۰}$$

$$f_T(v) = \int_{\text{۱/۹۵}}^{\text{۲/۰۵}} \text{۱۰۰}\, du = \text{۱۰}$$

ب) چون توابع یکنواخت پیوسته هستند دارای میانگین $\frac{a+b}{\text{۲}}$ و واریانس $\frac{(b-a)^{\text{۲}}}{\text{۱۲}}$ می باشند.

$$E(D) = \frac{\text{۱/۹۵} + \text{۲/۰۵}}{\text{۲}} = \text{۲}$$

$$\sigma_T^{\text{۲}} = \frac{(\text{۲/۰۵} - \text{۱/۹۵})^{\text{۲}}}{\text{۱۲}} = \frac{\cdot/\cdot\text{۱}}{\text{۱۲}}$$

$$E(T) = \frac{\text{۲} + \text{۲/۱۰}}{\text{۲}} = \text{۲/۰۵}$$

$$\sigma_T^{\text{۲}} = \frac{(\text{۲/۱} - \text{۲})^{\text{۲}}}{\text{۱۲}} = \frac{\cdot/\cdot\text{۱}}{\text{۱۲}}$$

۲-۶۷) فرض کنید که سختی راکول، X و میزان ساییدگی، Y، یک نوع آلیاژ (با داده های کدگذاری شده) دارای چگالی توام

$$f_{XY}(u,v)=\begin{cases}(u+v) & ۰\le u,v\le ۱\\ ۰ & \end{cases}$$

باشد. الف) چگالیهای حاشیه ای X و Y را پیدا کنید؛ ب) $E(X)$ و واریانس X را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) $f_X(u)=\int_۰^۱(u+v)dv=u+\left[\frac{v^۲}{۲}\right]_۰^۱=u+\frac{۱}{۲}$

$f_Y(v)=v+\frac{۱}{۲}$

ب) $E(x)=\int_۰^۱u(u+\frac{۱}{۲})du=\left[\frac{u^۳}{۳}+\frac{u^٤}{٤}\right]_۰^۱=\frac{۷}{۱۲}$

$$E(x^۲)=\int_۰^۱(u^۳+\frac{u^۲}{۲})du=\left[\frac{u^٤}{٤}+\frac{u^۳}{٦}\right]_۰^۱=\frac{٥}{۱۲}\Rightarrow\sigma_x^۲=\frac{٥}{۱۲}-(\frac{۷}{۱۲})^۲=\frac{۱۱}{۱٤٤}$$

۲-٦۸) نشان دهید که تعریف احتمال شرطی، چهار شرطی را که احتمالات معمولی به شرح مندرج در بخش ۲.٥ دارند، حائزند.

پاسخ:

۱) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},(A\cap B\subseteq B)\Rightarrow ۰\le P(A\cap B)\le P(B)$

$\Rightarrow ۰\le P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\le ۱$

۲) $A\subseteq B^c\Rightarrow P(A\cap B)=۰\Rightarrow P(A|B)=۰$

هر گاه A پیشامدی باشد که نتواند در فضای نمونه B رخ دهد. این شرط معادل شرط $A=\{\ \}$ در حالت عادی است.

$$۳)\quad B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \Rightarrow P(A|B) = 1$$

هر گاه پیشامد بر فضای نمونه کاهش یافته منطبق باشد. این شرط معادل $A = \Omega$ در حالت کلی است.

$$۴)\quad A_1 \cap A_2 = \{\ \} \Rightarrow P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

$$P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{P(A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

۲-۶۹) فرض کنید E_3, E_2, E_1 معرف پیشامدهایی در فضای نمونه باشند. صحت رابطه زیر را نشان دهید.

$$P\{E_1 \cap E_2 \cap E_3\} = P\{E_1|E_2 \cap E_3\}P\{E_2|E_3\}P\{E_3\}$$

پاسخ:

$$P\{E_1 \cap E_2 \cap E_3\} = P\{E_1|E_2 \cap E_3\}P\{E_2 \cap E_3\}$$

$$= P\{E_1|E_2 \cap E_3\}P\{E_2|E_3\}P\{E_3\}$$

۲-۷۰) فرض کنید $E_m, \ldots, E_2, E_1$ پیشامدهای مجزا و پوشاننده فضای نمونه Ω باشند به طوری که لازم باشد یکی از آنها حتما روی دهد؛ یعنی $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m = \Omega$. B را پیشامدی در Ω بگیرید. (به این ترتیب، B تنها می تواند همراه با پیشامدی مانند E_i روی دهد.) در نتیجه، داریم $B = BE_1 \cup BE_2 \cup \ldots \cup BE_m$. درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$P\{B\} = \sum_{i=1}^{m} P\{B|E_i\}P\{E_i\}$$

پاسخ:

$$P(B|E_i)P(E_i) = P(B \cap E_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} P(B|E_i).P(E_i)=\sum_{i=1}^{m}\left(B\cap(\bigcup_{i=1}^{m}E_i)\right)=P(B\cap\Omega)\underset{B\subseteq\Omega}{=}P(B)$$

۲-۷۱) فرض کنید $E_1,E_2,\dots,E_m$ پیشامدهای مجزا و پوشاننده فضای نمونه Ω باشند به طوری که لازم باشد یکی حتما روی دهد. B را هر پیشامد در Ω بگیرید. با استفاده از نتیجه مساله ۷۰ فرمول بیز را که در زیر آمده است اثبات کنید.

$$P\{E_i|B\}=\frac{P\{B|E_i\}P\{E_i\}}{P\{B|E_1\}P\{E_1\}+P\{B|E_2\}P\{E_2\}+\dots+P\{B|E_m\}P\{E_m\}}$$

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} P(B|E_i)=\dfrac{P(B\cap E_i)}{P(E_i)} \\ P(E_i|B)=\dfrac{P(B\cap E_i)}{P(B)} \end{array}\right\} P(B|E_i).P(E_i)=P(E_i|B)P(B)\Rightarrow P(E_i|B)=\frac{P(B|E_i).P(E_i)}{P(B)}$$

طبق سوال ۷۰ $P(B)=\sum_{i=1}^{m}P(B|E_r).P(E_r)\Rightarrow P(E_i|B)=\dfrac{P(B|E_i).P(E_i)}{\sum_{r=1}^{m}P(B|E_r).P(E_r)}$

۲-۷۲) در مساله ۶۱، تعیین کنید آیا پیشامدهای $E_1=\{w:X(w)\le 0\}$ و $E_2=\{w:Y(w)\le 1\}$ مستقل هستند؟ آیا پیشامدهای $E_2, E_3=\{w:X(w)\le 1\}$ مستقل هستند؟

پاسخ:

$E_1:\{w_1,w_2\}\Rightarrow P(E_1)=\frac{1}{2}$

$E_2:\{w_1\}\Rightarrow P(E_2)=\frac{1}{6}$

$E_3:\{w_1,w_2,w_3\}\Rightarrow P(E_3)=1$

الف) $P_{E_1 \cap E_2} = \frac{1}{6} \neq P_{E_1}.P_{E_2} = \frac{1}{12}$ E_2, E_1 مستقل نیستند.

ب) $P_{E_1 \cap E_2} = \frac{1}{6} = P_{E_1}.P_{E_2} = \frac{1}{6}$ E_2, E_1 مستقل هستند.

۲-۷۳) در مساله ۶۱، آیا متغیرهای تصادفی Y,X مستقل هستند؟

پاسخ:

شرط استقلال $P(X \cap Y) = P(X).P(Y)$

$P\{(0,1)\} = \frac{1}{6} \neq P_X(0).P_Y(1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ بنابراین X و Y غیرمستقلند.

۲-۷۴) در مساله ۶۲، آیا متغیرهای تصادفی Z,X مستقل هستند؟

پاسخ:

شرط استقلال $P_{X,Z}(x,z) = P_X(x).P_Z(z)$

$P_{X,Z}(0,0) = \frac{1}{6} \neq P_X(0).P_Z(0) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ بنابراین z,x غیر مستقلند.

۲-۷۵) در مساله ۶۳، آیا متغیرهای تصادفی X_1, X_2 مستقل هستند؟

پاسخ:

$P_{X_1,X_2}(0,1) = \frac{1}{8} \neq P_{X_1}(0).P_{X_2}(1) = \frac{3}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{32}$ x_1, x_2 غیر مستقلند.

۲-۷۶) در مساله ۶۴، آیا متغیرهای تصادفی X_U, X_L مستقل هستند؟

پاسخ:

$$f_{X_l,X_u}(l,u) = 2 \times 10^{-4} e^{-0/01(l+u)} \neq x_L(l).x_U(u) = (0/02)^2 e^{-0/01(2l+u)}(1 - e^{-0/01u})$$

مستقل نیستند.

۲-۷۷) در مساله ٦٥، آیا متغیرهای تصادفی Y,X مستقل هستند؟

پاسخ:

$$f_{X,Y}(u,v)=\frac{e^{-\frac{u^{۲}}{۲}}}{\sqrt{۲\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{v^{۲}}{۲}}}{\sqrt{۲\pi}}=\frac{۱}{۲\pi}e^{-\frac{(v^{۲}+u^{۲})}{۲}}$$

۲-۷۸) در مساله ٦٦، آیا متغیرهای تصادفی T,D مستقل هستند؟ امید ریاضی و واریانس فاصله موجود بین المان سوختی و لوله را پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_{DT}(u,v)=۱۰۰=۱۰\times۱۰=f_D(u).f_T(v)$$ مستقل هستند.

$$y=\frac{v-u}{۲};v\geq u$$ فاصله ی المان سوختی

$$E(y)=\int_{۲}^{۲/۰۵}\int_{۱/۹۵}^{v}۱۰۰.dudv\times(\frac{v-u}{۲})+\int_{۲/۰۵}^{۲/۱۰}\int_{۱/۹۵}^{۲/۰۵}۱۰۰.dudv\times(\frac{v-u}{۲})$$

$$=\int_{۲}^{۲/۰۵}\int_{۱/۹۵}^{۲/۰۵}۱۰۰.dudv\times(\frac{v-u}{۲})-\int_{۲}^{۲/۰۵}\int_{v}^{۲/۰۵}۱۰۰.dudv\times(\frac{v-u}{۲})+\int_{۲/۰۵}^{۲/۱۰}\int_{۱/۹۵}^{۲/۰۵}۱۰۰.dudv\times(\frac{v-u}{۲})$$

$$=\int_{۲}^{۲/۱۰}\int_{۱/۹۵}^{۲/۰۵}۱۰۰.dudv\times(\frac{v-u}{۲})-\int_{۲}^{۲/۰۵}\int_{v}^{۲/۰۵}۱۰۰.dudv\times(\frac{v-u}{۲})=\frac{۱}{۲}\times(E(v)-E(u))$$

$$-\int_{۲/۰۰}^{۲/۰۵}\int_{v}^{۲/۰۵}۱۰۰.dudv\times(\frac{v-u}{۲})=\frac{۱}{۲}\times(۲/۰۵-۲/۰۰)+۱۰۰\times۱/۰٤۱۷\times۱۰^{-۵}$$

$$E(y)=۲/٦۰٤\times۱۰^{-۲}$$

$$E(y^{۲})=E\frac{(v-u)^{۲}}{٤}=\frac{۱}{٤}\left[\sigma^{۲}_{(v-u)}+\left[\mu_{v-u}\right]^{۲}\right]=\frac{۱}{٤}\left[\sigma_v^{۲}+\sigma_u^{۲}-۲\operatorname{cov}(u,v)+\mu^{۲}_{(u-v)}\right]$$

$$=\frac{۱}{٤}\left[\frac{۲\times۰/۰۱}{۱۲}-۲\times۰+(۰/۰۵)^{۲}\right]=\frac{۱}{٤}\times\frac{۵}{۱۲}\times۱۰^{-۲}\Rightarrow E(y^{۲})=۱۰/٤$$

$$\sigma_y^{۲}=E(y^{۲})-E(y)^{۲}=۱۰/٤-\left(۲/٦۰٤\times۱۰^{-۲}\right)^{۲}=۱۰/۳۹۹٤$$

۲-۷۹) در مساله ۶۷، آیا متغیرهای تصادفی Y,X مستقل هستند؟

پاسخ:

$$f_{XY}(u,v) \neq f_X(u).f_Y(v) = (u+\frac{۱}{۲})(v+\frac{۱}{۲}) \neq u+v$$ مستقل نیستند

۲-۸۰) دو متغیر تصادفی مستقل $X_۲,X_۱$ را در نظر بگیرید، به طوری که هر یک تنها مقادیر ۱-، ۰، ۱+ را بپذیرد. فرض کنید که $P\{X_۱=-۱\}=P\{X_۱=+۱\}=\frac{۱}{٤}$ و $P\{X_۲=-۱\}=P\{X_۲=۰\}=\frac{۱}{۳}$ باشد. الف) میانگینها و واریانسهای $X_۲,X_۱$ را پیدا کنید؛ ب) اگر $Y=٤X_۱+۲X_۲$ باشد، $E(Y)$ را پیدا کنید؛ ج) تابع احتمال توام $X_۱,X_۲$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_{x_۱}(z)=\begin{cases}\frac{۱}{٤} & z=-۱\\ \frac{۱}{۲} & z=۰\\ \frac{۱}{٤} & z=۱\end{cases} \qquad f_{x_۲}(z)=\begin{cases}\frac{۱}{۳} & z=-۱\\ \frac{۱}{۳} & z=۰\\ \frac{۱}{۳} & z=+۱\end{cases}$$

الف) $E(X_۱)=۰$ $\qquad E(X_۲)=۰$

$E(X_۱^۲)=\frac{۱}{۲}$ $\qquad E(X_۲^۲)=\frac{۲}{۳}$

$\sigma^۲_{X_۱}=\frac{۱}{۲}$ $\qquad \sigma^۲_{X_۲}=\frac{۲}{۳}$

ب) $E(Y)=٤E(X_۱)+۲E(X_۲)=٤$

ج) مستقلند $x_۲,x_۱ \Rightarrow f_{X_۱X_۲}(u,v)=f_{X_۱}(u).f_{X_۲}(v)$

$x_2 \backslash x_1$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

۲-۸۱) در مساله ۶۱، تابع احتمال شرطی X را، اگر $Y=1$ باشد، پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_{X|Y}(x=0|y=1)=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=1$$

$$f_{X|Y}(x=1|y=1)=\frac{0}{\frac{1}{6}}=0$$

۲-۸۲) در مساله ۶۲، تابع احتمال شرطی Z را، اگر $X=4$ باشد، پیدا کنید.

پاسخ:

$$P\{Z=z|x=4\}=\frac{P(z,4)}{P_X(4)}$$

$$P_{Z|X}(z=0|x=4)=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=1 \qquad P(z=1|x=4)=\frac{0}{\frac{1}{6}}=0$$

۲-۸۳) در مساله ۶۳، تابع احتمال شرطی X_1 را، اگر $X_2=1$ باشد، پیدا کنید.

پاسخ:

$$P(x_1=u|x_2=1)=\frac{f_{x_1x_2}(u,1)}{f_{x_2}(1)}$$

$$P_{x_1|x_2}(k|x_2=1)=\begin{cases}\frac{1}{4} & k=0\\ \frac{1}{8} & k=1\\ \frac{3}{8} & k=2\\ \frac{1}{4} & k=3\end{cases}$$

۲–۸۴) در مساله ٦٤، تابع چگالی شرطی X_U را، اگر $X_L=60$ باشد، پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_{X_u|X_l}(x_u=u|x_l=60)=\frac{f_{X_uX_l}(x_u=u,x_l=60)}{f_{XL}(x_l=60)}=\frac{2\times10^{-4}e^{-0/01(60+u)}}{0/02e^{-0/02\times60}}$$

$$=0/01e^{-0/01(u-60)}=0/01e^{0/01(60-u)},u>60$$

۲–۸۵) در مساله ٦٥، تابع چگالی شرطی X را، اگر $Y=0/1$ باشد، پیدا کنید.

پاسخ:

از انجا که در این مسئله X و Y مستقل هستند، بنابراین داریم:

$$f_{X|Y}(x|y)\Rightarrow f_x(x)=\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

۲–۸٦) در مساله ٦٦، تابع چگالی شرطی D را، اگر $T=200$ باشد، پیدا کنید.

پاسخ:

در این مسئله D و T از هم مستقلند، بنابراین داریم:

$$f_{D|T}(u|v)=f_D(u)=10$$

۲–۸۷) در مساله ٦٧، تابع چگالی شرطی X را، اگر $Y=\frac{1}{2}$ باشد، پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_{X|Y}(x|۰/۵)=\frac{f_{XY}(x,۰/۵)}{f_Y(۰/۵)}=\frac{x+۰/۵}{۱}=x+۰/۵$$