مسائل فصل هشتم

در مسائل زیر می توان فرض کرد که یک نمونه تصادفی گرفته می شود و هر متغیر تصادفی تقریبا توزیع نرمال دارد. (مگر خلاف آن تصریح شود). هر گاه دو نمونه تصادفی مورد نیاز باشد، می توان فرض کرد که نمونه تصادفی دوم مستقل از اولی است و هر متغیر تصادفی نیز تقریبا توزیع نرمال دارد.

۸-۱) تصور کنید T_1 و T_2 براوردهای کننده های θ هستند، به طوری که $E(T_1)=\theta, E(T_2)=\theta/2$، $Var(T_1)=6, Var(T_2)=2$ است. کدام یک از آنها براورد کننده بهتری برای θ است؟ چرا؟

پاسخ:

$$\begin{cases} E(T_1)=\theta \\ E(T_2)=\dfrac{\theta}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{var}(T_1)=6 \\ \operatorname{var}(T_2)=2 \end{cases}$$

کارایی T_2 نسبت به T_1:
$$\frac{E(T_2-\theta)^2}{E(T_1-\theta)^2}=\frac{E\left((T_2-\frac{\theta}{2})-\frac{\theta}{2}\right)^2}{\operatorname{var}(T_1)}=\frac{\operatorname{var}(T_2)+\frac{\theta^2}{4}}{6}$$

$$\frac{8+\theta^2}{24}<1 \quad \Rightarrow \theta^2<16 \quad \Rightarrow |\theta|<4$$

هر گاه $|\theta|<4$ باشد، آنگاه، T_2 برآورد کننده ای بهتر از T_1 است.

۸-۲) در نمونه گیری از یک توزیع دوجمله ای، نشان دهید که درصد پیشامدهای مشاهده شده دریک نمونه، براورد کننده نااریبی است برای این احتمال که پیشامدی معین روی خواهد داد. واریانس درصد مشاهده شده چیست؟

پاسخ:

احتمال روی دادن k بار از یک مشاهده در n بار نمونه گیری

$$P(x=k)=\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

$$E(x)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}P^k(1-P)^{n-k}$$

$$\Rightarrow E(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}P(P)^{k-1}(1-P)^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}P(P)^{k-1}(1-P)^{n-k}$$

حال فرض کنید تعداد دفعات نمونه گیری بسیار بزرگ باشد، یعنی $n\to+\infty$

$$E(x)=nP\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n-1}{k-1}(P)^{k-1}(1-P)^{n-k}=nP\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}P^k(1-P)^{n-k}$$

$$E(x)=np\Rightarrow E\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}E(x)=p$$

$$\sigma_x^2=np(1-p)\overset{\bar{x}=\frac{x}{n}}{\Longrightarrow}\sigma_{\frac{x}{n}}^2=\frac{\sigma_x^2}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}$$

با توجه به اینکه $\hat{p}=p$، بنابراین براوردکننده $\hat{p}$ ناریب است. حال با استفاده از حد

پایین کریمر–رائو کمترین مقدار واریانس ناریبی را بدست می آوریم:

$$\operatorname{var}\hat{\theta}\geq\frac{1}{nE\left\{\left[\frac{d}{d\theta}Lnf_x(x,\lambda)\right]^2\right\}}$$

$$f_X(x,p)=\binom{n}{x}P^x(1-P)^{n-x}\Rightarrow Lnf_X(x,p)=Ln\binom{n}{x}+xLnP+(n-x)Ln(1-P)$$

$$\frac{d}{dp}Lnf_X(x,p)=\frac{x}{p}-\frac{n-x}{1-p}=\frac{x-np}{p(1-p)}$$

$$E\left\{\left[\frac{d}{dp}Lnf_x(x,p)\right]^2\right\}=E\left[\frac{x-np}{p(1-p)}\right]^2=\frac{E(x-np)^2}{p^2(1-p)^2}=\frac{\sigma_x^2}{p^2(1-p)^2}=\frac{np(1-p)}{p^2(1-p)^2}$$

$$Var\hat{\theta} \geq \frac{p(1-p)}{n^2}$$

۸-۳) تصور کنید T_1 و T_2 براورد کننده های θ هستند. $E(T_2) > \theta, E(T_1) = \theta$، واریانس T_1 مساوی ٤، واریانس T_2 مساوی ۲ و $E(T_2-\theta)^2 = 7$ است. کدام از آنها براورد کننده «بهتری» برای θ است؟ چرا؟

پاسخ:

$$\begin{cases} E(T_1) = \theta \\ E(T_2) > \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{var}(T_1) = 4 \\ \text{var}(T_2) = 2 \end{cases} \qquad E(T_2-\theta)^2 = 7$$

کارایی: $\frac{E(T_2-\theta)^2}{E(T_1-\theta)^2} = \frac{7}{4} > 1$ نسبت به T_1 T_2

T_1 براورد کننده بهتری نسبت به T_2 است.

۸-٤) تصور کنید T براساس یک نمونه تصادفی n تایی براورد کننده ای برای θ است. اگر $E(X_i) = \theta, T = \sum a_i X_i$ باشد، a_i ها چه محدودیتی باید داشته باشند که T براورد کننده های ناریب برای θ شود؟

پاسخ:

$$E(x_i) = \theta$$

$$E(T) = E(\sum a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \theta$$

از آنجا که T برآورد کننده نااریبی برای θ باید باشد بنابراین

$$E(T) = \theta \Rightarrow \sum a_i \theta = \theta \Rightarrow \sum a_i = 1$$

۸-۵) ثابت کنید $S'^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 / n$ براورد کننده ای اریب برای σ^2 است.

پاسخ:

$$S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{n-1}{n}.\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{n-1}{n}.S^2$$

براساس مطالب فصل چهارم کتاب می دانیم $E(S^2)=\sigma^2$، بنابراین:

$$E(S'^2)=\frac{n-1}{n}.E(S^2)=\frac{n-1}{n}.\sigma^2 \neq \theta^2 \Rightarrow E(\underset{S'^2}{\hat{\theta}^2}) \neq \theta^2 \rightarrow$$ اریب

بنابراین S'^2 براوردکننده ی اریب σ^2 است.

۸-٦) می توان تعداد میخ پرچهای ناقص، D به کار رفته در ساخت بال هواپیما را دارای توزیع پواسون با پارامتر λ، یعنی

$$P_D(k,\lambda)=P\{D=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\ldots$$

فرض کرد. یک نمونه تصادفی متشکل از n بال را مورد مشاهده قرار می دهیم. الف) $\hat{\lambda}$، یعنی MLE مربوط به λ را پیدا کنید؛ ب) آیا براورد کننده نااریب است؟ ج) حد پایین کریمو- رائو را در مورد واریانس براورد کننده های نااریب پیدا کنید. توجه کنید که $E(D)=\lambda$ و $E(D)^2=\lambda^2+\lambda$ است؛ د) آیا $\hat{\lambda}$ براورد کننده نااریب با کمترین واریانس λاست؟ درست بودن پاسخ خود را ثابت کنید؛ هـ) براورد کننده λ را با استفاده از روش گشتاورها پیدا کنید.

پاسخ:

$$MLE = L = P_D(0,\lambda).P_D(1,\lambda)\ldots P_D(n,\lambda)=\prod_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k.e^{-\lambda}}{k!}$$

$$l = LnL = \sum_{k=0}^{n}(kLn\lambda-\lambda-Ln(k!))$$

الف) $\frac{\partial l}{\partial \lambda}=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{\lambda}-1)=0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}k-n=0 \Rightarrow$

$$\hat{\lambda}=\bar{x}=\frac{\sum_{k=0}^{n}k}{n}=\lambda$$

برآورد کننده $\hat{\lambda}$ نااریب است.

ب) برآورد کننده $\hat{\lambda}$ نااریب است.

ج) $\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{1}{nE\left\{\left[\frac{d}{d\theta}Lnf_x(x,\lambda)\right]^2\right\}}=\frac{1}{nE\left\{(\frac{k}{\lambda}-1)^2\right\}}$

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{1}{nE\left[\frac{k^2}{\lambda^2}-\frac{2k}{\lambda}+1\right]}=\frac{1}{n\left[\frac{1}{\lambda^2}(\lambda^2+\lambda)-\frac{2\lambda}{\lambda}+1\right]}=\frac{1}{n(\frac{1}{\lambda})}$$

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{\lambda}{n}$$

د) $E(\bar{x})=\lambda$

$$\operatorname{var}(\bar{x})=\operatorname{var}(\hat{\lambda})=E\left[(\bar{x}-\lambda)^2\right]=\operatorname{var}(\frac{\sum x_i}{n})=\frac{1}{n^2}\sum \operatorname{var}(x_i)=\frac{n}{n^2}(\lambda^2+\lambda-\lambda^2)$$

$$=\operatorname{var}(\bar{x})=\frac{\lambda}{n}$$

د) $\hat{\lambda}=M_1=\frac{\sum x_i}{n}=\bar{x}$

۸-۷) عمر لامپهای خلا از توزیع نمایی پیروی می کند، یعنی تابع چگالی به شرح زیر است:

$$f_X(z,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-z/\theta}, & z \geq 0\\ 0, & z<0\end{cases}$$

یک نمونه تصادفی n تایی گرفته می شود. الف) با استفاده از روش گشتاورها براورد کننده ای برای θ پیدا کنید؛ ب) MLE مربوط به θ، یعنی $\hat{\theta}$ را پیدا کنید؛ ج) MLE مربوط به $\eta = ۱/\theta$ را پیدا کنید؛ د) پایایی یک لامپ خلا در زمان $\tau_۰$ طبق رابطه

$$R(\tau_۰) = P\{X > \tau_۰\} = e^{-\tau_۰/\theta}$$

تعریف می شود. MLE مربوط به $R(\tau_۰)$، یعنی $\hat{R}(\tau_۰)$، را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) $\theta = \dfrac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$

ب) $MLE = L = \prod_{z=۰}^{\infty} \dfrac{۱}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} \Rightarrow LnL = l = nLn\dfrac{۱}{\theta} + \sum_{i=۱}^{n}(-\dfrac{x_i}{\theta})$

$$\frac{\partial(LnL)}{\partial\theta} = ۰ \Rightarrow -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{\theta^۲} = ۰$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

ج) $\theta = \dfrac{۱}{\eta} \Rightarrow \hat{\eta} = \dfrac{۱}{\hat{\theta}} = \dfrac{۱}{\bar{x}}$

د) $R(\tau_۰) = P\{x > \tau_۰\} = e^{-\frac{\tau_۰}{\theta}} \Rightarrow \hat{R}(\tau_۰) = e^{-\frac{\tau_۰}{\hat{\theta}}} = e^{-\frac{\tau_۰}{\bar{x}}}$

۸-۸) در مساله ۷، حد پایین کریمر-رائو برای واریانس براورد کننده های نااریب را پیدا کنید. آیا MLE بر براورد کننده نااریب با کمترین واریانس θ منطبق می شود؟

پاسخ:

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{۱}{nE\left\{\left[\frac{d}{d\theta}Lnf_x(x,\theta)\right]^۲\right\}}$$

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{۱}{nE\left\{\left[\frac{d}{d\theta}(Ln\frac{۱}{\theta}-\frac{z}{\theta})\right]^۲\right\}} = \frac{۱}{nE\left\{\left[(-\frac{۱}{\theta}+\frac{z}{\theta^۲})\right]^۲\right\}}$$

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{۱}{nE\left\{(\frac{z-\theta}{\theta^۲})^۲\right\}} = \frac{۱}{n\frac{۱}{\theta^٤}E\left\{(z-\theta)^۲\right\}} = \frac{\theta^٤}{n\theta^۲}$$

توزیع نمایی است $\Rightarrow E(x)=\sigma_x=\theta$

$$\sigma_{\bar{x}}^۲ = \frac{\sigma_x^۲}{n} = \frac{\theta^۲}{n}$$

بلی، MLE بر براورد کننده ناریب منطبق نمی باشد.

۸-۹) می دانیم که مقاومت کششی لاستیک، توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و انحراف معیار معلوم ۸۰psi دارد. حد پایین مشخصات طراحی، L برای این ماده ۲۸٤۰psi است. به این ترتیب، درصد ضایعات، p به صورت درصد اقلامی که زیر این حد پایین قرار می گیرند تعریف می شود. قرار است یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی گرفته شود. عبارت MLE مربوط به p را پیدا کنید. (راهنمایی: ابتدا MLE مربوط به μ را پیدا کنید).

پاسخ:

$$\begin{cases} \mu = \mu_x \\ \sigma = ۸۰ psi \end{cases}$$

در ابتدا، مقدار MLE مربوط به μ را پیدا می کنیم، فرض می کنیم برای بدست آوردن آن یک نمونه n تایی می گیریم:

$$L = f_x(x_1,\mu), f_x(x_2,\mu), \dots, f_x(x_n,\mu)$$

$$\ell = LnL = Ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} = Ln\left(\frac{1}{80\sqrt{2\pi}}\right)^n - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{12800}$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\ell}{\partial\mu} = \frac{2}{12800}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} = \bar{x}$$

حال MLE مربوط به p را بدست می آوریم، احتمال اینکه از ۲۵ نمونه، k نمونه بالای حد پایین مشخصات طراحی قرار بگیرد، برابر است با:

$$P(D=k) = \binom{25}{k}P^k(1-P)^{25-k}$$

احتمال اینکه یک نمونه پایین حد پایین مشخصات طراحی قرار بگیرد، برابر است با:

$$P\{d=1\} = P\{x < 2840\} = P\left\{z < \frac{2840-\mu}{80}\right\}$$

$$MLE = L = P\{D=x_1\}.P\{D=x_2\}.P\{D=x_3\}.\dots, P\{D=x_{25}\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\binom{25}{x_i}P^{x_i-1}(1-P)^{25-x_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial P} = 0 \Rightarrow \ell = LnL = \sum_{i=1}^{25}\binom{25}{x_i} + x_i Lnp + (25-x_i)Ln(1-p)$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial p} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{25}x_i}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{25}(25-x_i)}{1-p} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{25\bar{x}}{p} = \frac{25^2 - 25\bar{x}}{1-p} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\bar{x}}{25}$$

۸–۱۰) در زیر بخش ۵.۲.۸ براساس یک نمونه تصادفی n تایی MLE، $\hat{p}$، برای پارامتر متغیر تصادفی برنویی، p به دست آمد. همچنین می دانیم که جمع n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع برنویی، T با پارامتر p توزیع دو جمله ای با پارامترهای n و p دارد، یعنی

$$P(T=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\dots,n$$

MLE مربوط به p را براساس تنها یک مشاهده از متغیر تصادفی T پیدا کنید. آیا این پاسخ بر $\hat{p}$ منطبق است؟

پاسخ:

$$L=P\{x=x\}=p^x(1-p)^x = p^x(1-p)^{1-x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial P}=xp^{x-1}(1-p)^{1-x}-(1-x)p^x(1-p)^{-x}=0$$

$$[x(1-p)-(1-x)p]p^{x-1}(1-p)^{-x}=0\Rightarrow x-xp-p+xp=0$$

$\hat{p}=x$ این پاسخ بر $\hat{P}$ منطبق است.

۸–۱۱) فرض می شود عمر، T، ترانزیستورها توزیع ویبول دارد، یعنی تابع چگالی به صورت

$$f_T(z)=\begin{cases}\frac{\beta}{\eta}z^{\beta-1}e^{\frac{-z^\beta}{\eta}} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

است که $\beta,\eta>0$ است. یک نمونه تصادفی n تایی مشاهده می شود. اگر β ثابت و معلوم باشد، الف) MLE مربوط به η را پیدا کنید؛ ب) پایایی یک ترانزیستور در زمان $\tau_\circ$ طبق رابطه

$$R(\tau_\circ)=P\{\tau_\circ<T\}=e^{-\tau_\circ^{\beta}/\eta}$$

تعریف می شود. MLE مربوط به $R(\tau_\circ)$، یعنی $\hat{R}(\tau_\circ)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$f_T(z)=\begin{cases}\frac{\beta}{\eta}z^{\beta-1}e^{\frac{-z^{\beta}}{\eta}} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

$$MLE=L=\prod_{z=0}^{\infty}\frac{\beta}{\eta}x_i^{\beta-1}e^{-\frac{z^{\beta}}{\eta}}\Rightarrow LnL=l=\sum_{i=1}^{n}\left(Ln\frac{\beta}{\eta}+(\beta-1)Lnx_i-\frac{x_i^{\beta}}{\eta}\right)$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial P}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\eta}+\frac{x_i^{\beta}}{\eta^2}\right)=0\Rightarrow\frac{n}{\eta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}{\eta^2}$$

$$\hat{\eta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}{n}$$

$$\hat{R}(\tau_\circ)=e^{-\frac{\tau_\circ^{\beta}}{\hat{\eta}}}=e^{-\frac{\tau_\circ^{\beta}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}{n}\right)}}$$

۸-۱۲) در مثال «کنترل فرایند» که در زیر بخش ۵.۲.۸ معرفی شد، MLE پارامتر، p یک متغیر تصادفی برنویی را براساس یک نمونه تصادفی n تایی به دست آوردیم.

الف) حد پایین کریمر-رائو برای واریانس تمام براورد کننده های ناریب را پیدا کنید؛

ب) آیا MLE بر براورد کننده نااریب با کمترین واریـانس p منطبـق اسـت؟ ج) بـراورد کننده p را با استفاده از روش گشتاورها پیدا کنید.

پاسخ:

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{1}{nE\left\{\left[\frac{d}{dp}Lnf_x(x,p)\right]^2\right\}}$$

$$\operatorname{var}\hat{P} \geq \frac{1}{nE\left\{\left[\frac{d}{dp}Lnp^x(1-p)^{1-x}\right]^2\right\}} = \frac{1}{nE\left\{\left[\frac{d}{dp}[xLnp+(1-x)Ln(1-p)]\right]^2\right\}}$$

$$\operatorname{var}\hat{P} \geq \frac{1}{nE\left\{\left[\frac{x}{p}+\frac{(1-x)(-1)}{1-p}\right]^2\right\}} = \frac{1}{nE\left\{\frac{(x-np)^2}{p^2(1-p)^2}\right\}} = \frac{p(1-p)}{n}$$

ب) $f_X(x,p) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

$$MLE = L == \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \Rightarrow \ell = LnL = \sum_{i=1}^{n}\left(x_iLnp+(1-x_i)Ln(1-p)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ell}{\partial p} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{p}-\frac{1-x_i}{1-p}\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-p}{p(1-p)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

بلی، MLE بر کمترین واریانس p منطبق است.

ج) $p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$

۸-۱۳) در مساله ٦، براورد کننده بیز λ را با استفاده از میانگین مربع خطا به عنوان تابع زیان با فرض وجود تابع چگالی پیشین یکنواخت (در محدوده $[-\infty,+\infty]$) پیدا کنید. (راهنمایی: در جدول ۱۰۸ این توزیع پیشین حالت خاصی از توزیع گاما به شرط $C=۱$ است، هر گاه D به سمت بینهایت میل کند.)

پاسخ:

$$P_D(k,\lambda)=P\{D=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k=۰,۱,۲,\ldots$$

$$\text{بنابر جدول ۱۰۸} \Rightarrow \hat{\lambda}=\frac{(\sum x_i+C)D}{nD+۱}$$

$$\hat{\lambda}=\frac{(\sum x_i+۱)D}{nD+۱} \Rightarrow \hat{\lambda}=\lim_{D\to+\infty}\frac{D(\sum x_i+۱)}{nD+۱}=\frac{\sum x_i}{n}$$

۸-۱٤) در مساله ٦، براورد کننده بیز λ را با استفاده از میانگین مربع خطا به عنوان تابع زیان و با این فرض که توزیع پیشین λ به ازای $\lambda\geq ۰$، به صورت $e^{-\lambda}$ باشد، پیدا کنید. (راهنمایی: نتایج ارائه شده در جدول ۱۰۸ را به کار ببرید.)

پاسخ:

$$P_D(k,\lambda)=P\{D=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad \lambda\geq ۰$$

$$\text{توزیع پیشین پارامتر } \lambda=\frac{۱}{\Gamma(C)D^C}\lambda^{(C-۱)}e^{-\frac{\lambda}{D}}=e^{-\lambda}\Rightarrow C=۱, D=۱$$

$$\hat{\lambda}=\frac{(\sum x_i+C)}{nD+۱}=\frac{\sum x_i+۱}{n+۱}$$

۸-۱۵) در مساله ۷، براورد کننده بیز $\eta=۱/\theta$ را با استفاده از میانگین مربع خطا به عنوان تابع زیان و با فرض وجود تابع چگالی پیشین یکنواخت (در محدوده

$[-\infty,+\infty]$) پیدا کنید. (راهنمایی: در جدول ۱.۸این توزیع پیشین حالت خاصی از توزیع گاما با شرایط $C=1$ است، هر گاه D به سمت بینهایت میل کند.)

پاسخ:

$$R(\hat{\eta},\eta)=(\hat{\eta}-\eta)^2=(\frac{1}{\hat{\theta}}-\frac{1}{\theta})^2$$

$$f_x(z,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{z}{\theta}} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}\Rightarrow f_x(z,\eta)=\begin{cases}\eta e^{-\eta z} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=1\\ D\to+\infty\end{cases}$$

$$\eta \text{ توزیع پیشین پارامتر}=\frac{1}{\Gamma(C)D^C}\lambda^{(C-1)}e^{-\frac{\lambda}{D}}=\eta e^{-\eta z}$$

$$\hat{\eta}=\frac{(n+C)D}{D(\sum x_i+1)}\Rightarrow\hat{\eta}=\lim_{D\to+\infty}\frac{(n+C)}{(\sum x_i+\frac{1}{D})}=\frac{n+1}{\sum x_i}$$

۸-۱۶) در مساله ۷، براورد کننده بیز $\eta=1/\theta$ را با استفاده از میانگین مربع خطا به عنوان تابع زیان و با این فرض که توزیع پیشین η به ازای $\eta\geq 0$، به صورت $e^{-\eta}$ است، پیدا کنید. (راهنمایی: نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ را به کار ببرید)

پاسخ:

$$\eta \text{ توزیع پیشین پارامتر}=e^{-\eta}\Rightarrow C=1, D=1$$

$$\text{بنابراین داریم}\Rightarrow\hat{\eta}=\frac{1+n}{(\sum x_i+1)}$$

۸-۱۷) در مثال «کنترل فرایند» که در زیر بخش ۵.۲.۸ معرفی شد، بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی، MLE پارامتر، p یک متغیر تصادفی برنولی را به دست آوردیم. با

استفاده از میانگین مربع خطا به عنوان تابع زیان و با این فرض کـه توزیـع پیشـین p در فاصله $[۰,۱]$ یکنواخت است، براورد کننده بیز p را پیدا کنید. با این فرض که توزیـع پیشین p در فاصله $[۰,۱]$ به صورت $۶p(۱-p)$ است براورد کننده بیـز p را پیـدا کنیـد.

(راهنمایی: نتایج ارائه شده در جدول ۱۸ را به کار ببرید.)

پاسخ:

$$\frac{\Gamma(C+D)}{\Gamma(C)\Gamma(D)} p^{(C-۱)}(۱-p)^{D-۱} = ۶p(۱-p) \Rightarrow ۶p(۱-p) = \text{توزیع پیشین P در فاصله } [۰,۱]$$

$$\Rightarrow C=۲, D=۲ \Rightarrow \hat{P} = \frac{C+\sum x_i}{C+D+n} = \frac{۲+\sum x_i}{۲+۲+n} = \frac{\sum x_i + ۲}{n+۴}$$

۸-۱۸) قرار است در مورد میانگین عمر پوتینها یک فاصله اطمینان یک طرفه پایین ۹۹ درصدی ارائه شود. به منظور اینکه حـد پـایین بـا احتمـال ۰/۹۵ بـیش از نـیم مـاه از میانگین واقعی فاصله نداشته باشد، به چند مشاهده نیاز اسـت؟ فـرض کنیـد انحـراف معیار عمر پوتینها مساوی $\frac{۳}{۲}$ ماه است.

پاسخ:

$$\sigma = \frac{۳}{۲} month \Rightarrow (d = \frac{\mu - \mu_۰}{\sigma}, \beta) = (d = \frac{۰/۵}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۳}, \beta = ۰/۹۵) \Rightarrow n = ۵$$

۸-۱۹) می توان نشان داد که توزیع نتایج مشاهده های مربوط به محموله هـای مـاده شیمیایی مفروضی، حول میـانگین واقعـی تـراکم یـک محمولـه مفـروض از آن مـاده، توزیع نرمال بـا انحـراف معیـار $۰/۰۰۵ g/cc$ دارد. بـرای ارائـه بـراوردی بـر اسـاس میانگین n نمونه، که در ۹۵ درصد از موارد در فاصله $۰/۰۰۲ g/cc$ از میـانگین واقعـی تراکم محموله باشد، باید از چه اندازه نمونه ای استفاده کرد؟

پاسخ:

$$\sigma = ۰/۰۰۵ g/cc$$

$$U - L = ۲K_{\frac{\alpha}{۲}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow ۲\times ۰/۰۰۲ = ۲\times ۱/۹۶ \times \frac{۰/۰۰۵}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = ٤/۹ \Rightarrow n = ۲٤$$

۸-۲۰) مقاومت پارگی نوع خاصی پارچه در مورد چهار نمونه محاسبه شد و نتایج (بر حسب psi) ۱۸۲،۱۷۲،۱۷٦،۱۷۸ بود. براساس تجربه قبلی، انحراف معیار ۵psi است. فاصله اطمینانی ۹۹ درصدی برای مقدار متوسط مقاومت پارگی محموله پارچه را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=۱}^{٤} x_i}{٤} = ۱۷۷ psi \\ \sigma = ۵ psi \end{cases} \Rightarrow [L,U] = [\bar{x} - k_{۰/۰۱} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty)$$

$$= [۱۷۷ - ۲/۳۲ \times \frac{۵}{۲}, +\infty) = [۱۷۱/۲, +\infty)$$

۸-۲۱) تراکم ۲۷ چاشنی انفجاری را تعیین کردیم و میانگین تراکم نمونه، ۱/۵۳، محاسبه شد. انحراف معیار، معلوم و مساوی ۰/۰۳ است. یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد پایین برای تراکم پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} \bar{x} = ۱/۵۳ \\ \sigma = ۰/۰۳ \\ ۱-\alpha = ۰/۹۵ \end{cases}$$

$$[L,U] = [\bar{x} - k_{۰/۰۵} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty)$$

$$=[1/52-1/645\times\frac{0/03}{\sqrt{27}},+\infty)=[1/52,+\infty)$$

۸-۲۲) میانگین نمونه برد یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از موشکهای انبار شده ۲۲۰۸ یارد محاسبه شده است. انحراف معیار، معلوم و مساوی ٤۰ یارد است. برای میانگین واقعی برد، فاصله اطمینانی ۹۹ درصدی پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n=100 \\ \bar{x}=2208 \\ \sigma=40 \\ 1-\alpha=0/99 \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-k_{0/005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+k_{0/005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$=\left[2208-2/575\times\frac{40}{\sqrt{100}},2208+2/575\times\frac{40}{\sqrt{100}}\right]=[2197/7,2218/3]$$

۸-۲۳) در مساله ۲۲، چند مشاهده مورد نیاز خواهد بود تا طول فاصله اطمینان ۲۰ یارد، ٥ یارد و یک یارد به دست آید؟

پاسخ:

الف) $L-U=2k_{0/005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=20\Rightarrow 2\times 2/575\times\frac{40}{\sqrt{n}}=20\Rightarrow\sqrt{n}=10/3\Rightarrow n=106$

ب) $L-U=2k_{0/005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5\Rightarrow 2\times 2/575\times\frac{40}{\sqrt{n}}=5\Rightarrow\sqrt{n}=41/2\Rightarrow n=1697$

ج) $L-U=2k_{0/005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1\Rightarrow 2\times 2/575\times\frac{40}{\sqrt{n}}=1\Rightarrow\sqrt{n}=206\Rightarrow n=42436$

۸-۲٤) داده های زیر معرف اندازه گیریهای تخلخل یک نمونه از محموله زغال است.

فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای میانگین واقعی پیدا کنید. فرض کنید $\sigma = \frac{1}{4}$ است.

۱/۹۰	۱/۹۷	۱/۹۷	۲/۳٤	۲/۰۷	۲/۱٦
۱/۹٤	۲/۳۱	۲/٤۷	۲/۱۵	۲/۳۲	۲/۱۹
۲/۱٦	۲/۱۵	۲/۱٤	۲/۲۵	۱/۸٦	۲/۳۱
۲/۰٤	۲/۲٤	۲/۱۵	۲/۱۱	۲/٤۸	۲/۳۰
۲/۲۵	۲/۰۷	۲/۰۹	۲/۰۱	۱/۹۱	۲/۲۱

پاسخ:

$$\begin{cases}\sum x_i = ٦٤/٤٣ \\ \bar{x} = ۲/۱۵ \\ ۱-\alpha = ۰/۹۵\end{cases} \qquad \begin{cases}\sigma = \frac{۱}{٤} \\ n = ۳۰\end{cases}$$

$$[L,U] = \left[\bar{x} - k_{۰/۰۲۵}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + k_{۰/۰۲۵}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[۲/۱۵ - ۱/۹٦ \times \frac{\frac{۱}{٤}}{\sqrt{۳۰}}, ۲/۱۵ + ۱/۹٦ \times \frac{\frac{۱}{٤}}{\sqrt{۳۰}}\right] = [۲/۰٦, ۲/۲٤]$$

۸-۲۵) بدون فرض $\sigma = \frac{۱}{٤}$، مساله ۲٤ را حل کنید. (توجه کنید که $S = ۰/۱۵۳$ است).

پاسخ:

$$[L,U] = \left[\bar{x} - t_{۰/۰۲۵,۲۹}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{۰/۰۲۵,۲۹}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$=\left[۲/۱۵-۲/۰۴۵\times\frac{۰/۱۵۳}{\sqrt{۳۰}},۲/۱۵+۲/۰۴۵\times\frac{۰/۱۵۳}{\sqrt{۳۰}}\right]=[۲/۰۹,۲/۲۱]$$

۸-۲۶) با این فرض که براورد σ براساس نمونه ۴۰ یارد است. مساله ۲۳ را حل کنید. پاسخ شما چقدر تغییر می کند؟

پاسخ:

$S=۴۰$

الف) $L-U=۲t_{۰/۰۰۵,n-۱}\frac{S}{\sqrt{n}}=۲۰\Rightarrow t_{۰/۰۰۵,n-۱}\times\frac{۴۰}{\sqrt{n}}=۱۰\Rightarrow t_{۰/۰۰۵;n-۱}=۰/۲۵\sqrt{n}\Rightarrow n=۱۱۴$

ب) $L-U=۲t_{۰/۰۰۵,n-۱}\frac{S}{\sqrt{n}}=۵\Rightarrow\frac{t_{۰/۰۰۵,n-۱}}{\sqrt{n}}=\frac{۱}{۱۶}=۰/۰۶۲۵\Rightarrow n=۲۲۴$

ج) $L-U=۲t_{۰/۰۰۵,n-۱}\times\frac{۴۰}{\sqrt{n}}=۱\Rightarrow\frac{t_{۰/۰۰۵,n-۱}}{\sqrt{n}}=\frac{۱}{۸۰}=۰/۰۱۲۵\Rightarrow n=۲۵۳$

۸-۲۷) بدون فرض $\sigma=5$ مساله ۲۰ را حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=۱۷۷\\ S^۲=۱۷/۳۳\Rightarrow S=۴/۱۶psi\end{cases}\qquad\begin{cases}n=۴\\ ۱-\alpha=۰/۹۹\end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-t_{۰/۰۰۵,۳}\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{۰/۰۰۵,۳}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$=\left[۱۷۷-۵/۸۴۱\times\frac{۴/۱۶}{\sqrt{۴}},۱۷۷+۵/۸۴۱\times\frac{۴/۱۶}{\sqrt{۴}}\right]=[۱۶۴/۸۵,۱۸۹/۱۵]$$

۸-۲۸) مساله ۲۱ را با فرض $S=۰/۰۴$ (براساس نمونه) حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}S=۰/۰۴\\ n=۲۷\\ \bar{x}=۱/۵۳\end{cases}\qquad\{۱-\alpha=۰/۹۵$$

$$[L,U]=[\bar{x}-t_{۰/۰۵,۲۶}\frac{S}{\sqrt{۲۷}},+\infty)$$

$$=[۱/۵۳-۱/۷۰۶\times\frac{۰/۰۴}{\sqrt{۲۷}},+\infty)=[۱/۵۱۷,+\infty)$$

۸-۲۹) براساس داده های زیر، یک فاصله اطمینان ۹۹ درصدی برای قطر میخ پرچ ارائه کنید:

۶/۶۸	۶/۶۶	۶/۶۲	۶/۷۲
۶/۷۶	۶/۶۷	۶/۷۰	۶/۷۲
۶/۷۸	۶/۶۶	۶/۷۶	۶/۷۲
۶/۷۶	۶/۷۰	۶/۷۶	۶/۷۶
۶/۷۴	۶/۷۴	۶/۸۱	۶/۶۶
۶/۶۴	۶/۷۹	۶/۷۲	۶/۸۲
۶/۸۱	۶/۷۷	۶/۶۰	۶/۷۲
۶/۷۴	۶/۷۰	۶/۶۴	۶/۷۸
۶/۷۰	۶/۷۰	۶/۷۵	۶/۷۹

$\bar{X}=۶/۷۲۳۶$ $\qquad$ $\sum X^{۲}=۱۶۲۷/۵۵۹۵$

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=۶/۷۲۳۶\\ \sum x^{۲}=۱۶۲۷/۵۵۹۵\end{cases}\qquad \begin{cases}S^{۲}=\dfrac{\sum x^{۲}-n\bar{x}^{۲}}{n-۱}=\dfrac{۱۶۲۷/۵۵۹۵-۳۶\times(۶/۷۲۳۶)^{۲}}{۳۵}\\ S^{۲}=۳/۲۸\times۱۰^{-۳}\quad\Rightarrow S=۰/۰۵۷\end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-t_{۰/۰۰۵,۳۵}\frac{S}{\sqrt{۳۶}},\bar{x}+t_{۰/۰۰۵,۳۵}\frac{S}{\sqrt{۳۶}}\right]$$

$$=\left[۶/۷۲۳۶-۲/۷۲۷\times\frac{۰/۰۵۷}{۶},۶/۷۲۳۶+۲/۷۲۷\times\frac{۰/۰۵۷}{۶}\right]$$

$$=[۶/۶۹۷۷,۶/۷۴۹۵]$$

۸-۳۰) براساس یک نمونه متشکل از ۲۷ چاشنی ، اگر $S=۰/۰۴$ باشد، فاصله اطمینانی ۹۰ درصدی برای σ پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n=۲۷ \\ S=۰/۰۴ \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha=۰/۱۰ \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-۱}{x^{۲}_{۰/۰۵;۲۶}}};S\sqrt{\frac{n-۱}{x^{۲}_{۰/۹۵;۲۶}}}\right]=\left[۰/۰۴\sqrt{\frac{۲۶}{۳۸/۸۸۵}};۰/۰۴\sqrt{\frac{۲۶}{۱۵/۳۷۹}}\right]$$

$$[L,U]=[۰/۰۳۲۷;۰/۰۵۲]$$

۸-۳۱) براساس داده های مساله ۲۹، فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای σ پیدا کنید.

پاسخ:

$$[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-۱}{x^{۲}_{۰/۰۲۵;۳۵}}};S\sqrt{\frac{n-۱}{x^{۲}_{۰/۹۷۵;۳۵}}}\right]$$

$$\begin{cases} n=۳۶ \\ S=۰/۰۵۷ \end{cases} \Rightarrow [L,U]=\left[۰/۰۵۷\sqrt{\frac{۳۵}{۵۳/۱۶}},۰/۰۵۷\sqrt{\frac{۳۵}{۲۰/۶۱۲}}\right]$$

$$=[۰/۰۴۶;۰/۰۷۴].$$

۸-۳۲) قطر کامل شده کابل مسلح برق دارای توزیع نرمال است. نمونه ای ۲۰ تایی دارای میانگین ۰/۷۹۰ و انحراف معیار ۰/۰۱ است. برای σ,μ (به طور انفرادی) فواصل اطمینانی ۹۵ درصدی پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n = ۲۰ \\ ۱-\alpha = ۰/۹۵ \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x} = ۰/۷۹۰ \\ S = ۰/۰۱ \end{cases}$$

فواصل اطمینان برای μ: $[L,U] = \left[\bar{x} - t_{۰/۰۲۵,۱۹}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{۰/۰۲۵,۱۹}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

$$= \left[۰/۷۹۰ - ۲/۰۹۳ \times \frac{۰/۰۱}{\sqrt{۲۰}}, ۰/۷۹۰ + ۲/۰۹۳ \times \frac{۰/۰۱}{\sqrt{۲۰}}\right]$$

$$= [۰/۷۸۵, ۰/۷۹۵]$$

فاصله اطمینان برای σ:

$$[L,U] = \left[S\sqrt{\frac{n-۱}{x^۲_{۰/۰۲۵;۱۹}}}; S\sqrt{\frac{n-۱}{x^۲_{۰/۹۷۵;۱۹}}}\right] = \left[۰/۰۱\sqrt{\frac{۱۹}{۳۲/۸۵۲}}, ۰/۰۱\sqrt{\frac{۱۹}{۸/۹۰۷}}\right]$$

$$= [۰/۰۰۷۶, ۰/۰۱۴۶]$$

۸-۳۳) در مورد نمونه ای ۱۵ تایی داریم: $\sum(X_i - \bar{X})^۲ = ۱۷/۸$. برای σ، فواصل اطمینان ۹۵ درصدی پایین، بالا، و دوطرفه پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n = ۱۵ \\ \sum(x_i - \bar{x})^۲ = ۱۷/۸ \end{cases} \qquad \begin{cases} S^۲ = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})^۲}{n-۱} = \dfrac{۱۷/۸}{۱۴} = ۱/۲۷ \\ S = ۱/۱۲۷ \end{cases}$$

فاصله اطمینان ۹۵ درصدی پایین $= [L,U] = \left[S\sqrt{\frac{n-۱}{x^۲_{۰/۰۵,۱۴}}}; +\infty\right] = \left[۱/۱۲۷\sqrt{\frac{۱۴}{۲۳/۶۸۵}}, +\infty\right]$

$$=[\cdot/\text{٨٦٦},+\infty]$$

فاصله اطمینان ۹۵ درصدی بالا $=[L,U]=\left[\cdot,S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\text{٩٥},\text{١٤}}}}\right]=\left[\cdot,\text{١/١٢٧}\sqrt{\frac{\text{١٤}}{\text{٦/٥٧١}}}\right]$

$$=[\cdot,\text{١/٦٤٥}]$$

فاصله اطمینان ۹۵ درصدی دو طرفه $=[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\cdot\text{٢٥};\text{١٤}}}};S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\text{٩٧٥};\text{١٤}}}}\right]$

$$=\left[\text{١/١٢٧}\sqrt{\frac{\text{١٤}}{\text{٢٦/١١٩}}},\text{١/١٢٧}\sqrt{\frac{\text{١٤}}{\text{٥/٦٢٩}}}\right]=[\cdot/\text{٨٢٥},\text{١/٧٧٧}]$$

۸-۳۴) با فرض $S=\text{٤}$، فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای σ پیدا کنید. اگر S مبتنی بر ۱۰ درجه آزادی باشد؛ همچنین، اگر S مبتنی بر ۲۵ درجه آزادی باشد.

پاسخ:

$$\begin{cases}S=\text{٤}\\ \alpha=\cdot/\cdot\text{٥}\end{cases}$$

الف) $[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\cdot\text{٢٥};\text{١٠}}}};S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\text{٩٧٥};\text{١٠}}}}\right]=\left[\text{٤}\sqrt{\frac{\text{١٠}}{\text{٢٠/٤٨٣}}},\text{٤}\sqrt{\frac{\text{١٠}}{\text{٣/٢٤٧}}}\right]$

$$=[\text{٢/٧٩٥},\text{٧/٠٢٠}]$$

ب) $[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\cdot\text{٢٥};\text{٢٥}}}};S\sqrt{\frac{n-1}{x^{2}_{\cdot/\text{٩٧٥};\text{٢٥}}}}\right]=\left[\text{٤}\sqrt{\frac{\text{٢٥}}{\text{٤٠/٦٤٦}}},\text{٤}\sqrt{\frac{\text{٢٥}}{\text{١٣/١٢}}}\right]$

$$=[\text{٣/١٣٧},\text{٥/٥٢٢}]$$

۸-۳۵) به منظور آزمایش تفاوت تاثیر دو روش کشت گندم، تجربه ای اجرا می کنیم. ده قطعه زمین را شخم کم عمق و پانزده قطعه زمین را شخم عمیق می زنیم. میانگین استحصال گروه اول در هر جریب ۴۰/۸ بوشل و میانگین گروه دوم ۴۴/۷ بوشل

است. فرض کنید انحراف معیار شخم کم عمق معادل ۰/۶بوشل و انحراف معیار شخم عمیق ۰/۸ بوشل باشد. فاصله اطمینانی ۹۰ درصدی برای تفاوت استحصال ارائه کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=44/7\\ n_x=15\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{y}=40/8\\ n_y=10\end{cases}\quad \begin{cases}\sigma_x=0/8\\ \sigma_y=0/6\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha=0/10\\ \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}-k_{0/05}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}},\bar{x}-\bar{y}+k_{0/05}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right]$$

$$=\left[3/9-1/96\sqrt{\frac{0/64}{15}+\frac{0/36}{10}},3/9+1/96\sqrt{\frac{0/64}{15}+\frac{0/36}{10}}\right]$$

$$=[3/35,4/45]$$

۸-۳۶) بیست دور از مهمات رایج و ده دور از مهمات آزمایشی با توالی تصادفی شلیک شدند. میانگین فشار لوله مهمات رایج معادل ۴۱۹۰۰psi و میانگین فشار لوله مهمات آزمایشی معادل ۴۴۲۰۰psi بود. انحراف معیارها برای مهمات رایج و آزمایشی معلوم و هر دو ۲۲۵۰psi بودند. برای تغییر فشار، فواصل اطمینان ۹۵ درصدی بالا، پایین و دوطرفه پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=44200\\ n_x=10\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{y}=41900\\ n_y=20\end{cases}\quad \begin{cases}\sigma_x=\sigma_y=2250\\ \alpha=0/05\end{cases}$$

الف) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی بالا: $[L,U]=\left(-\infty,\bar{x}-\bar{y}+k_{0/05}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right]$

$$=\left(-\infty,۲۳۰۰+۱/۶۴۵\sqrt{(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲۰})(۲۲۵۰)^{۲}}\right]=(-\infty,۳۷۳۳]$$

ب) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی پایین $[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}-k_{./۰۵}\sqrt{\frac{\sigma_x^{۲}}{n_x}+\frac{\sigma_y^{۲}}{n_y}},+\infty\right)$

$$=\left[۲۳۰۰-۱/۶۴۵\sqrt{(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲۰})(۲۲۵۰)^{۲}},+\infty\right)=[۸۶۷,+\infty)$$

ج) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی دو طرفه

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}-k_{./۰۲۵}\sqrt{\frac{\sigma_x^{۲}}{n_x}+\frac{\sigma_y^{۲}}{n_y}},\bar{x}-\bar{y}+k_{./۰۲۵}\sqrt{\frac{\sigma_x^{۲}}{n_x}+\frac{\sigma_y^{۲}}{n_y}}\right]$$

$$=\left[۲۳۰۰-۱/۹۶\sqrt{(\frac{۳}{۲۰})(۲۲۵۰)^{۲}},۲۳۰۰+۱/۹۶\sqrt{(\frac{۳}{۲۰})(۲۲۵۰)^{۲}}\right]=[۵۹۲,۴۰۰۸]$$

۳۷-۸) در ساخت نردبانهای چوبی، قطعات کناری نردبانها تنش بیشتری (در جهت رگه چوب) دارند اگر الوار تازه به جای کوره در معرض هوا خشک شود. می توان انحراف معیار هر دو را ۲۵psi گرفت. نمونه ای متشکل از ۲۵ مشاهده از هر یک از دو نوع گرفته شد و به میانگینهای ۱۱۷۰psi برای هوا و ۱۱۰۵ psi برای کوره انجامید. فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای افزایش تنش پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=۱۱۷۰\\ \bar{y}=۱۱۰۵\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma_x=\sigma_y=۲۵\\ n_x=n_y=۲۵\end{cases}\qquad\begin{cases}۱-\alpha=./۹۵\\ \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}-k_{./۰۲۵}\sqrt{\frac{\sigma_x^{۲}}{n_x}+\frac{\sigma_y^{۲}}{n_y}},\bar{x}-\bar{y}+k_{./۰۲۵}\sqrt{\frac{\sigma_x^{۲}}{n_x}+\frac{\sigma_y^{۲}}{n_y}}\right]$$

$$=\left[۶۵-۱/۹۶\sqrt{۲\times\frac{(۲۵)^{۲}}{۲۵}},۶۵+۱/۹۶\sqrt{۲\times\frac{(۲۵)^{۲}}{۲۵}}\right]$$

$$=\left[۶۵-۶۹/۲۹۶,۶۵+۶۹/۲۹۶\right]=\left[-۴/۲۹۶,۱۳۴/۲۹۶\right]$$

۸-۳۸) در زمینه تحقیق روی خرج انفجاری شلیک موشک، که با هدف تقلیل مدت تاخیر بین آغاز جریان شلیک و انفجار صورت می گیرد، آزمایشهایی روی خرج نوع T و خرج نوع C صورت گرفت. می توان فرض کرد که انحراف معیار هر دو نوع معادل ۰/۰۴ است. اگر به ازای ۱۴ مشاهده از هر نوع، $\overline{C}$ معادل ۰/۲۶۱ ثانیه و $\overline{T}$ معادل ۰/۲۵۰ ثانیه باشد، فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای تفاوت مدتها پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\overline{C}=۲۶۱\\ \overline{T}=۰/۲۵۰\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma_C=\sigma_T=۰/۰۴\\ n_C=n_T=۱۴\end{cases}\qquad\begin{cases}۱-\alpha=۰/۹۵\\ \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\overline{C}-\overline{T}-k_{۰/۰۲۵}\sqrt{\frac{\sigma_C^{۲}}{n_C}+\frac{\sigma_T^{۲}}{n_T}},\overline{C}-\overline{T}+k_{۰/۰۲۵}\sqrt{\frac{\sigma_C^{۲}}{n_C}+\frac{\sigma_T^{۲}}{n_T}}\right]$$

$$=\left[۰/۰۱۱-۱/۹۶\times\sqrt{\frac{(۰/۰۴)^{۲}}{۱۴}+\frac{(۰/۰۴)^{۲}}{۱۴}},۰/۰۱۱+۱/۹۶\times\sqrt{\frac{(۰/۰۴)^{۲}}{۱۴}+\frac{(۰/۰۴)^{۲}}{۱۴}}\right]$$

$$=\left[-۰/۰۱۸۶,۰/۰۴۰۶\right]$$

۸-۳۹) دو تحلیلگر اندازه گیریهایی مکرر در مورد سختی آب شهر انجام دادند. با فرض مجهول، ولی مساوی بودن واریانسها، فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای تفاوت اندازه هایی که دو تحلیلگر بدست آورده اند پیدا کنید.

اندازه های کدگذاری شده سختی

تحلیلگر A	تحلیلگر B
۰/۴۶	۰/۸۲
۰/۶۲	۰/۶۱
۰/۳۷	۰/۸۹
۰/۴۰	۰/۵۱
۰/۴۴	۰/۳۳
۰/۵۸	۰/۴۸
۰/۴۸	۰/۲۳
۰/۵۳	۰/۲۵
	۰/۶۷
	۰/۸۸
$\overline{X} = 0/485$	$\overline{Y} = 0/567$
$\sum (X_i - \overline{X})^2 = 0/0524$	$\sum (Y_i - \overline{Y})^2 = 0/5598$

پاسخ:

$$\begin{cases} \alpha = 0/05 \end{cases} \quad \begin{cases} n_x = 8 \\ n_y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{y} = 0/576 \\ \sum (y_i - \overline{y})^2 = 0/5598 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{x} = 0/485 \\ \sum (x_i - \overline{x})^2 = 0/0524 \end{cases}$$

$$[L,U] = [\overline{x} - \overline{y} - t_{0/025;16}\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 + \sum (y_i - \overline{y})^2}{n_x - n_y - 2}},$$

$$\overline{x} - \overline{y} + t_{0/025;16}\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 + \sum (y_i - \overline{y})^2}{n_x - n_y - 2}}]$$

$$=[-۰/۰۸۲-۲/۱۲۰\sqrt{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۰}}\sqrt{\frac{۰/۰۵۲۴+۰/۰۵۵۹۸}{۱۶}},-۰/۰۸۲+۲/۱۲۰\sqrt{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۰}}\sqrt{\frac{۰/۰۵۲۴+۰/۰۵۵۹۸}{۱۶}}]$$

$$=[-۰/۰۸۲-۰/۰۱۹۶۷,-۰/۰۸۲+۰/۰۱۹۶۷]$$

$$[L,U]=[-۰/۱۰۱۶۷,-۰/۰۶۲۳۳]$$

۸–۴۰) شانزده مورد اندازه گیری نقطه ذوب یک ماده که هشت مورد توسط تحلیلگر I و هشت مورد تحلیلگر II صورت گرفته است، به شرح زیر است. داده ها بر حسب درجه سانتی گراد است.

تحلیلگر II (Y)	تحلیلگر I (X)
۱۶۳/۵	۱۶۴/۴
۱۶۲/۸	۱۶۹/۷
۱۶۳/۰	۱۶۹/۲
۱۶۳/۲	۱۶۹/۵
۱۶۰/۷	۱۶۱/۸
۱۶۱/۵	۱۶۸/۷
۱۶۰/۹	۱۶۹/۵
۱۶۲/۱	۱۶۳/۹
$\overline{Y}=۱۶۲/۲۱۲۵$	$\overline{X}=۱۶۷/۰۸۷۵$
$\sum(Y_i-\overline{Y})^۲=۸/۰۹$	$\sum(X_i-\overline{X})^۲=۷۰/۸۱$

با فرض مجهول ولی مساوی بودن واریانسها، فاصله اطمینانی ۹۰ درصدی برای میانگین تفاوت اندازه هایی که دو تحلیلگر گرفته اند پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=١٦٧/٠٨٧٥\\ n_x=٨\end{cases}\qquad \begin{cases}\bar{y}=١٦٢/٢١٢٥\\ n_y=٨\end{cases}\qquad \begin{cases}\sum(x_i-\bar{x})^٢=٧٠/٨١\\ \sum(y_i-\bar{y})^٢=٨/٠٩\end{cases}\qquad \begin{cases}١-\alpha=٠/٩٠\\ \sigma_x=\sigma_y=?\end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{x}-\bar{y}-t_{٠/٠٥;١٤}\sqrt{\frac{١}{n_x}+\frac{١}{n_y}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^٢+\sum(y_i-\bar{y})^٢}{n_x-n_y-٢}},$$

$$\bar{x}-\bar{y}+t_{٠/٠٥;١٤}\sqrt{\frac{١}{n_x}+\frac{١}{n_y}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^٢+\sum(y_i-\bar{y})^٢}{n_x-n_y-٢}}]$$

$$=[٤/٨٧٥-١/٧٦١\sqrt{\frac{٢}{٨}}\sqrt{\frac{٧٠/٨١+٨/٠٩}{٨+٨-٢}},٤/٨٧٥+١/٧٦١\sqrt{\frac{٢}{٨}}\sqrt{\frac{٧٠/٨١+٨/٠٩}{٨+٨-٢}}]$$

$$=[٢/٧٨٥,٦/٩٦٥]$$

٨-٤١) مدتهای سوختن دو نوع مختلف ظرف دودزا بر حسب ثانیه به شرح زیر است:

نوع I (X)		نوع II (Y)	
٤٨١	٥٧٢	٥٢٦	٥٣٧
٥٠٦	٥٦١	٥١١	٥٨٢
٥٢٧	٥٠١	٥٥٦	٦٠٥
٦٦١	٤٨٧	٥٤٢	٥٥٨
٥٠١	٥٢٤	٤٩١	٥٧٨

$\bar{X}=٥٣٢/١$ $\qquad$ $\bar{Y}=٥٤٨/٦$

$\sum(X_i-\bar{X})^٢=٢٦٣٩٤/٩$ $\qquad$ $\sum(Y_i-\bar{Y})^٢=١٠٧٢٤/٤$

با فرض مجهول ولی مساوی بودن واریانسها، فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای میانگین تفاوت مدتهای سوختن پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=532/1\\ n_x=10\end{cases}\qquad\begin{cases}\bar{y}=548/6\\ n_y=10\end{cases}\qquad\begin{cases}\sum(x_i-\bar{x})^2=26394/9\\ \sum(y_i-\bar{y})^2=10724/4\end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{x}-\bar{y}-t_{0/025;18}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2+\sum(y_i-\bar{y})^2}{n_x-n_y-2}},$$

$$\bar{x}-\bar{y}+t_{0/025;18}\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2+\sum(y_i-\bar{y})^2}{n_x-n_y-2}}]$$

$$=[532/1-548/6-2/101\times\sqrt{\frac{2}{10}}\sqrt{\frac{26394/9+10724/4}{20-2}},$$

$$532/1-548/6+2/101\times\sqrt{\frac{2}{10}}\sqrt{\frac{26394/9+10724/4}{20-2}}]$$

$$[L,U]=[-59/168,26/168]$$

۸-۴۲) مساله ۳۸ را حل کنید اگر فرض شود واریانسها مجهول ولی مساوی اند و مقادیر $S_C^2=0/00125$ و $S_T^2=0/00132$ از نمونه به دست آمده اند.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{C}=0/261\\ \bar{T}=0/250\end{cases}\qquad\begin{cases}S_C^2=0/00125\\ S_T^2=0/00132\end{cases}\qquad\begin{cases}n_C=n_T=14\\ \alpha=0/05\end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{C}-\bar{T}-t_{0/025;26}\sqrt{\frac{1}{n_C}+\frac{1}{n_T}}\sqrt{\frac{S_C^2+S_T^2}{2}},\bar{C}-\bar{T}+t_{0/025;26}\sqrt{\frac{1}{n_C}+\frac{1}{n_T}}\sqrt{\frac{S_C^2+S_T^2}{2}}\right]$$

$$=[0/011-2/056\sqrt{\frac{2}{14}}\sqrt{\frac{0/00257}{2}},0/011+2/056\sqrt{\frac{2}{14}}\sqrt{\frac{0/00257}{2}}]$$

$$=[-۰/۰۱۶۹, ۰/۰۳۸۹]$$

۸-۴۳) فرض کنید X,Y توزیع نرمال با میانگینهای μ_x, μ_y و واریانسهای $\sigma_x^۲$ و $\sigma_y^۲$ دارند. براساس n_x, n_y مشاهده $\bar{X}, \bar{Y}$ و $S_x^۲, S_y^۲$ را براورد کننده های معمولی فرض کنید. بدون فرض $\sigma_x = \sigma_y$ چگونه فاصله اطمینانی برای $\mu_x - \mu_y$ پیدا می کنید؟

پاسخ:

براساس مطالب فصل هفتم، هرگاه واریانس دو توزیع مجهول و نامساوی باشند، معمولا از آزمون t' استفاده می کنیم:

$$t' = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{S_x^۲}{n_x} + \frac{S_y^۲}{n_y}}}$$

$$p\left\{-t_{\frac{\alpha}{۲};\upsilon} \le \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{S_x^۲}{n_x} + \frac{S_y^۲}{n_y}}} \le t_{\frac{\alpha}{۲};\upsilon}\right\} = ۱ - \alpha$$

$$p\left\{\bar{x} - \bar{y} - t_{\frac{\alpha}{۲};\upsilon}\sqrt{\frac{S_x^۲}{n_x} + \frac{S_y^۲}{n_y}} \le \mu_x - \mu_y \le \bar{x} - \bar{y} + t_{\frac{\alpha}{۲};\upsilon}\sqrt{\frac{S_x^۲}{n_x} + \frac{S_y^۲}{n_y}}\right\} = ۱ - \alpha$$

۸-۴۴) در مطالعه ای در مورد واکنش عصبی، قدرت واکنش زانوی ۱۵ نفر در دو مجموعه شرایط مختلف به کسب نتایج زیر بر حسب درجه قوس حرکت پا انجامیده است.

در شرایط آرامش	در شرایط تنش
۳۵	۳۱

۱۵	۱۹
۱۹	۲۲
۲۹	۲۶
۳٤	۳۶
۲۶	۳۰
۱۹	۲۹
۳۷	۳۶
۲٤	۳٤
۲۷	۳۳
۱٤	۱۹
۱۹	۱۹
۳۰	۲۶
۷	۱۵
۱۳	۱۸

فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای تغییر در واکنش پیدا کنید. (راهنمـایی: از آزمـون t زوجی استفاده کنید).

پاسخ:

$$\begin{cases} n_x = n_y = ۱۵ \\ \alpha = ۰/۰۵ \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum (x_i - \bar{x})^۲ = ۱۱۲۰/٤ \\ \sum (y_i - \bar{y})^۲ = ۷۱۰/٤ \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x} = ۲۳/۲ \\ \bar{y} = ۲۶/۲ \end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{x}-\bar{y}-t_{۰/۰۲۵;۲۸}\sqrt{\frac{۲}{۱۵}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(y_i-\bar{y})^۲}{۲۸}},$$

$$\left.\bar{x}-\bar{y}-t_{۰/۰۲۵;۲۸}\sqrt{\frac{۲}{۱۵}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(y_i-\bar{y})^۲}{۲۸}}\right]$$

$$=\left[-۳-۲/۰۴۸\sqrt{\frac{۲}{۱۵}}\sqrt{\frac{۱۱۲۰/۴+۷۱۰/۴}{۲۸}},-۳+۲/۰۴۸\sqrt{\frac{۲}{۱۵}}\sqrt{\frac{۱۱۲۰/۴+۷۱۰/۴}{۲۸}}\right]$$

$$=[-۲/۹۵۳,۳/۰۴۷]$$

۸-۴۵) جدول زیر درصد افت مقاومت تنشی نمونه های زوجی یک آلیاژ را به دنبال غوطه ور کردن آن در یک محلول خورنده ارائه می کند. در هر زوج یک مشاهده در معرض تنش است و دیگری نیست.

با تنش	بدون تنش	شماره آزمون
۲/۹	۶/۴	۱
۷/۹	۴/۶	۲
۷/۳	۴/۶	۳
۸/۰	۶/۴	۴
۶/۷	۳/۲	۵
۷/۶	۵/۲	۶
۵/۷	۶/۵	۷
۴/۱	۴/۹	۸

۹	۴/۳	۸/۱
۱۰	۵/۶	۶/۵
۱۱	۳/۷	۶/۵
۱۲	۴/۶	۶/۰

فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای میانگین تفاوت در مقاومت تنشی پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n_x = n_y = ۱۲ \\ \alpha = ۰/۰۵ \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{y} = ۷ \\ \sum (y_i - \bar{y})^۲ = ۱۹/۷۶ \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x} = ۵ \\ \sum (x_i - \bar{x})^۲ = ۱۲/۴۸ \end{cases}$$

$$[L,U] = [\bar{x} - \bar{y} - t_{۰/۰۲۵;۲۲}\sqrt{\frac{۲}{۱۲}}\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲ + \sum (y_i - \bar{y})^۲}{۲۲}},$$

$$\bar{x} - \bar{y} + t_{۰/۰۲۵;۲۲}\sqrt{\frac{۲}{۱۲}}\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲ + \sum (y_i - \bar{y})^۲}{۲۲}}]$$

$$= [-۲ - ۲/۰۷۴\sqrt{\frac{۳۲/۲۴}{۱۳۲}}, -۲ + ۲/۰۷۴\sqrt{\frac{۳۲/۲۴}{۱۳۲}}] == [-۳/۰۲۵, -۰/۹۷۵]$$

۸-۴۶) در مساله ۴۲، فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای σ_T / σ_C پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} \alpha = ۰/۰۵ \\ n_C = n_T = ۱۴ \end{cases} \quad \begin{cases} S_C^۲ = ۰/۰۰۱۲۵ \\ S_T^۲ = ۰/۰۰۱۳۲ \end{cases}$$

$$[L,U] = \left[\frac{S_T}{S_C}\sqrt{F_{۱-\frac{\alpha}{۲};n_C-۱,n_T-۱}}, \frac{S_T}{S_C}\sqrt{F_{\frac{\alpha}{۲};n_C-۱,n_T-۱}}\right]$$

$$= \left[۱/۰۲۷۶\sqrt{\frac{۱}{F_{۰/۰۲۵;۱۳,۱۳}}}, ۱/۰۲۷۶\sqrt{F_{۰/۰۲۵;۱۳,۱۳}}\right]$$

$$=\left[۱/۰۲۷۶\sqrt{\frac{۱}{۳/۱۱۷}},۱/۰۲۷۶\sqrt{۳/۷۱۱}\right]=[۰/۵۸۲,۱/۸۱۴]$$

۸-۴۷) نتایج زیر دو نمونه از توزیعهای نرمال محاسبه شده اند:

$$\begin{array}{llll} X: & n_x=۸ & \sum X=۱۲ & \sum X^۲=۴۶ \\ Y: & n_y=۱۱ & \sum Y=۲۲ & \sum Y^۲=۸۰ \end{array}$$

فاصله اطمینانی ۹۵ درصدی برای σ_x/σ_y پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n_x=۸ & \sum x=۱۲ \quad \sum x^۲=۴۶ \\ n_y=۱۱ & \sum y=۲۲ \quad \sum y^۲=۸۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_x^۲=۲۶ \\ S_y^۲=۳۶ \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=۰/۰۵ \\ \end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{۱}{F_{۰/۰۲۵;۷,۱۰}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{۰/۰۲۵;۱۰,۷}}\right]$$

$$=\left[۰/۸۵\times\sqrt{\frac{۱}{۳/۹۵}},۰/۸۵\times\sqrt{۴/۷۶}\right]=[۰/۴۲۷۷,۱/۸۵۴۵]$$

۸-۴۸) تصور کنید در مورد هر یک از دو طرز کار، ۱۵ آزمایش صورت گرفته و مقدار ۳/۵ ، برای نسبت انحراف معیار نمونه ها، S_x/S_y به دست می آید. یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی پایین ودو طرفه برای σ_x/σ_y پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} \dfrac{S_x}{S_y}=۳/۵ \\ n_x=n_y=۱۵ \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha=۱-۰/۹۰=۰/۱۰ \\ \end{cases}$$

فاصله اطمینان ۹۰ درصدی پایین:

$$[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{۱}{F_{۰/۱۰;۱۴,۱۴}}},+\infty\right)=\left[۳/۵\sqrt{\frac{۱}{۰/۰۲۶۶۸}},+\infty\right)=[۲۱/۴۲۸,+\infty)$$

فاصله اطمینان ۹۰ درصدی دو طرفه:

$$[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{1}{F_{0/05;14,14}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{0/05;14,14}}\right]$$

$$=\left[3/5\sqrt{\frac{1}{2/483}},3/5\sqrt{2/483}\right]=[2/22,5/515]$$

۸-۴۹) فرض کنید $S_x^2=20$ و $S_y^2=6$. با این فرض که واریانسهای نمونه مبتنی بر ۲۵ درجه آزادی اند، فاصله اطمینانی ۹۹ درصدی برای σ_x/σ_y پیدا کنید. مساله را با درجات آزادی ۱۰۰ و ۵۰۰ نیز حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}S_x^2=20\\S_y^2=6\end{cases}\qquad\begin{cases}n_x=n_y=25+1=26\\\upsilon=25\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha=0/01\\\end{cases}$$

فاصله اطمینان برای $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$:

$$\upsilon=25\Rightarrow[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{1}{F_{0/005;25,25}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{0/005;25,25}}\right]$$

$$=\left[1/8257\sqrt{\frac{1}{2/903}},1/8257\sqrt{2/903}\right]=[1/0715,3/111]$$

$$\upsilon=100\Rightarrow[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{1}{F_{0/005;100,100}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{0/005;100,100}}\right]$$

$$=\left[1/8257\sqrt{\frac{1}{1/729}},1/8257\sqrt{1/729}\right]=[1/388,2/4006]$$

$$U=500\Rightarrow[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{1}{F_{0/005;500,500}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{0/005;500,500}}\right]$$

۸-۵۰) در مساله ٦، توزیع مجانبی $\sqrt{n}(\hat{\lambda}-\lambda)$ را پیدا کنید. یک فاصله اطمینان تقریبی دو طرفه ۹۵ درصدی (براساس توزیع مجانبی) برای λ پیدا کنید.

پاسخ:

$$\operatorname{var}\hat{\theta} \geq \frac{\lambda}{n} \quad \Rightarrow \sigma_b = \frac{\lambda}{n} \qquad \begin{cases} \alpha = ۰/۰۵ \\ k_{\frac{\alpha}{۲}} = k_{۰/۰۲۵} = ۱/۹٦ \end{cases}$$

$$MLE\theta = \hat{\theta} \Rightarrow MLE\lambda = \hat{\lambda} = \bar{x}$$

$$[L,U] = \left[\hat{\theta} - k_{\frac{\alpha}{۲}}\sigma_b, \hat{\theta} + k_{\frac{\alpha}{۲}}\sigma_b\right]$$

$$= \left[\bar{x} - ۱/۹٦\frac{\bar{x}}{n}, \bar{x} + ۱/۹٦\frac{\bar{x}}{n}\right]$$

توزیع مجانبی $\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\lambda}-\lambda) = \sqrt{n}(\bar{x}-\lambda)$

۸-۵۱) با مراجعه به مسائل ۷و۸، توزیع مجانبی $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)$ را پیدا کنید. یک فاصله اطمینان تقریبی دو طرفه ۹۵ درصدی (براساس توزیع مجانبی) برای θ پیدا کنید.

پاسخ:

توزیع مجانبی $\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) = \sqrt{n}(\bar{x}-\theta)$

دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین ۰ و واریانس $\frac{\bar{x}^۲}{n}$ است.

فاصله اطمینان تقریبی $[L,U] = \left[\hat{\theta} \pm k_{۰/۰۲۵}\sigma_{\hat{\theta}}\right] = \left[\bar{x} \pm ۱/۹٦\sigma_{\hat{\theta}}\right]$

$$= \left[\bar{x} \pm ۱/۹٦\sqrt{\frac{\hat{\theta}^۲}{n}}\right] = \left[\bar{x} \pm ۱/۹٦\sqrt{\frac{\bar{x}^۲}{n}}\right] = \left[\bar{x} \pm ۱/۹٦\frac{\bar{x}}{\sqrt{n}}\right]$$

۸-۵۲) در مساله ۱۱، توزیع مجانبی MLE، مربوط به η را بیابید و برای این پارامتر یک فاصله اطمینان تقریبی ۹۹ درصدی پیدا کنید.

پاسخ:

۸-۵۳) در زیر بخش ۸.۳.۸ فاصله اطمینانی تقریبی برای پارامتر p متغیر تصادفی برنویی به صورت

$$\hat{p} \pm K_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ارائه شد. این فاصله از رابطه

$$P\left\{-K_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq K_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

بدین ترتیب به دست آمد که به جای p در مخرج کسر، $\hat{p}$ گذاشتیم. با حل مستقیم عبارت داخل آکولاد نسبت به p، عبارت دیگری می توان به دست آورد. نشان دهید که این راه حل به نتیجه زیر می انجامد.

$$\frac{1}{(1+K_{\alpha/2}^2/n)}\left\{\hat{p}+\frac{K_{\alpha/2}^2}{2n} \pm K_{\alpha/2}\left[\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}+\frac{K_{\alpha/2}^2}{4n^2}\right]^{1/2}\right\}$$

پاسخ:

۸-۵۴) در مساله ۳۹، تحلیلگر سومی ده اندازه مکرر از سختی آب شهر به دست آورد. نتایج به دست آمده توسط تحلیلگر سوم $\overline{Z} = 0/541$ و $\sum(Z_i-\overline{Z})^2 = 0/0124$

است. مجموعه ای از حدود اطمینان همزمان ۰/۹۵ درصدی برای تمام تفاوتهای زوجی بین تحلیلگرها پیدا کنید(فرض کنید واریانسها مجهول ولی مساوی اند)

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha = \cdot/\cdot ۵ \\ \alpha_i = \dfrac{\alpha}{۳}\end{cases} \quad \begin{cases}\bar{y} = \cdot/۵۶۷ \\ \sum (y_i - \bar{y})^۲ = \cdot/۵۵۹۸\end{cases} \quad \begin{cases}\bar{x} = \cdot/۴۸۵ \\ \sum (x_i - \bar{x})^۲ = \cdot/\cdot ۵۲۴\end{cases} \quad \begin{cases}\bar{z} = \cdot/۵۴۱ \\ \sum (z_i - \bar{z})^۲ = \cdot/۵۱۲۴\end{cases}$$

$$\begin{cases}n_x = ۸ \\ n_y = n_z = ۱\cdot\end{cases}$$

از آزمون t دو نمونه ای استفاده می کنیم، زیرا واریانسها مجهول ولی مساویند.

حدود اطمینان مربوط به x,y:

$$[L,U] = \left[\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\frac{\cdot/\cdot ۲۵}{۳};۱۶}\sqrt{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱\cdot}}\sqrt{\frac{\sum (x_i-\bar{x})^۲ + \sum (y_i-\bar{y})^۲}{۸+۱\cdot-۲}}\right]$$

$$= \left[-\cdot/\cdot ۸۲ \pm ۲/۶۹۶\sqrt{\frac{۵/۵\cdot ۹۸}{۶۴\cdot}}\right] = [-\cdot/۳۳۲, -\cdot/۱۶۸]$$

حدود اطمینان مربوط به z,x:

$$[L,U] = \left[\bar{x} - \bar{z} \pm t_{\frac{\cdot/\cdot ۲۵}{۳};۱۶}\sqrt{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱\cdot}}\sqrt{\frac{\sum (x_i-\bar{x})^۲ + \sum (z_i-\bar{z})^۲}{۸+۱\cdot-۲}}\right]$$

$$= \left[\cdot/۴۸۵ - \cdot/۵۴۱ \pm ۲/۵۵۲\sqrt{\frac{۹}{۴\cdot}}\sqrt{\frac{\cdot/۵۶۴۸}{۱۶}}\right] = [-\cdot/۲۸۳۴, -\cdot/۱۷۱۴]$$

حدود اطمینان مربوط به z,y:

$$[L,U] = \left[\bar{y} - \bar{z} \pm t_{\frac{\cdot/\cdot ۲۵}{۳};۱۸}\sqrt{\frac{۲}{۱\cdot}}\sqrt{\frac{\sum (y_i-\bar{y})^۲ + \sum (z_i-\bar{z})^۲}{۱۸}}\right]$$

$$=\left[\text{۰/۵۶۷}-\text{۰/۵۴۱}\pm \text{۲/۷۶۹}\sqrt{\frac{\text{۱/۰۷۲۲}}{\text{۹۰}}}\right]=[-\text{۰/۲۷۶},\text{۰/۳۲۸}]$$

۸-۵۵) در مساله ۴۰، دو تحلیلگر دیگر هر یک هشت اندازه مستقل در مورد نقطه ذوب یک ماده ارائه کرده اند. نتایج تحلیلگر سوم $\bar{Z}=\text{۱۶۳/۰۴۱۰}$ و $\sum(Z_i-\bar{Z})^{\text{۲}}=\text{۵۲/۷۰}$ است. نتایج تحلیلگر چهارم $\bar{W}=\text{۱۵۴/۰۲۶۳}$ و $\sum(W_i-\bar{W})^{\text{۲}}=\text{۳۳/۱۶}$ است. یک حدود اطمینان همزمان ۹۰ درصدی برای همه تفاوتهای زوجی پیدا کنید (فرض کنید واریانسها مجهول ولی مساوی اند)

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=\text{۱۶۷/۰۸۷۵}\\ \sum(x_i-\bar{x})^{\text{۲}}=\text{۷۰/۸۱}\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{w}=\text{۱۵۴/۰۲۶۳}\\ \sum(w_i-\bar{w})^{\text{۲}}=\text{۳۳/۱۶}\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{z}=\text{۱۶۳/۰۴۱۰}\\ \sum(z_i-\bar{z})^{\text{۲}}=\text{۵۲/۷۰}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=\text{۰/۱۰}\\ \alpha_i=\text{۰/۰۲۵}\end{cases}\quad \begin{cases}n_x=n_y=\text{۸}\\ n_z=n_w=\text{۸}\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{y}=\text{۱۶۲/۲۱۲۵}\\ \sum(y_i-\bar{y})^{\text{۲}}=\text{۸/۰۹}\end{cases}$$

حدود اطمینان برای x,y:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}\pm t_{\text{۰/۰۱۲۵};\text{۱۴}}\sqrt{\frac{\text{۲}}{\text{۸}}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^{\text{۲}}+\sum(y_i-\bar{y})^{\text{۲}}}{\text{۸}+\text{۸}-\text{۲}}}\right]$$

$$=\left[\text{۴/۸۷۵}\pm \text{۲/۵۴۴}\sqrt{\frac{\text{۷۸/۹}}{\text{۴}\times\text{۱۴}}}\right]$$

حدود اطمینان برای z,x:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{z}\pm t_{\text{۰/۰۱۲۵};\text{۱۴}}\sqrt{\frac{\text{۲}}{\text{۸}}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^{\text{۲}}+\sum(z_i-\bar{z})^{\text{۲}}}{\text{۱۴}}}\right]$$

$$=\left[\text{۴/۰۴۶۵}\pm \text{۲/۵۴۴}\sqrt{\frac{\text{۱۲۳/۵۱}}{\text{۴}\times\text{۱۴}}}\right]=[\text{۰/۲۶۸},\text{۷/۸۲۳}]$$

حدود اطمینان برای w,x:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{w}\pm t_{./.۱۲۵;۱٤}\sqrt{\frac{۲}{۸}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(w_i-\bar{w})^۲}{٤\times ۱٤}}\right]$$

$$=\left[۳/۰٦۱۲\pm ۲/٥٤٤\sqrt{\frac{۳۲۱/۱۱۳۸}{٥٦}}\right]=[۳/۰۳۱,۹/۱٥۳]$$

حدود اطمینان برای z,y:

$$[L,U]=[\bar{y}-\bar{z}\pm ۲/٥٤٤\sqrt{\frac{۲}{۸}}\sqrt{\frac{۱٦۲/۲۱۲٥+۱٦۳/۰٤۱۰}{۱٤}}]$$

$$=[-٦/۹٦,٥/۳۰]$$

حدود اطمینان برای w,y:

$$[L,U]=\left[\bar{y}-\bar{w}\pm t_{./.۱۲۵;۱٤}\sqrt{\frac{۲}{۸}}\sqrt{\frac{\sum(y_i-\bar{y})^۲+\sum(w_i-\bar{w})^۲}{۱٤}}\right]$$

$$=[۸/۱۸٦۲\pm ۲/۱۸۳٤]=[٦/۰۰۲۸,۱۰/۳٦۹٦]$$

حدود اطمینان برای w,z:

$$[L,U]=\left[\bar{z}-\bar{w}\pm t_{./.۱۲۵;۱٤}\sqrt{\frac{۲}{۸}}\sqrt{\frac{\sum(z_i-\bar{z})^۲+\sum(w_i-\bar{w})^۲}{۱٤}}\right]$$

$$=[۹/۰۱٤۷\pm ۳/۱٥۰۱]=[٥/۸٦٤٦,۱۲/۱٦٤۸]$$

۸–٥٦) در مساله ٤۱، یک ظرف نوع سوم در نظر گرفته می شود. داده ها (براساس ۱۰ مشاهده) $\bar{Z}=٥۰۱/۳$ و $\sum(Z_i-\bar{Z})^۲=۱٥۲۱٤/۷$ اند. یک حدود اطمینان همزمان ۹٥

درصدی برای همه تفاوتهای زوجی ظرفها به دست آورید. (فرض کنید واریانسها مجهول ولی مساوی اند)

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{y}=٥٤٨/٦\\ \sum(y_i-\bar{y})^٢=١٠٧٢٤/٦\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{x}=٥٣٢/١\\ \sum(x_i-\bar{x})^٢=٢٦٣٩٤/٩\end{cases}\quad \begin{cases}\bar{z}=٥٠١/٣\\ \sum(z_i-\bar{z})^٢=١٥٢١٤/٧\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_i=\dfrac{٠/٠٥}{٣}\\ \alpha_{\frac{i}{٢}}=\dfrac{٠/٠٢٥}{٣}=٠/٠٠٨٣٣\end{cases}\quad \begin{cases}n_x=n_y=n_z=١٠\\ \alpha=٠/٠٥\end{cases}$$

حدود اطمینان برای x,y:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{y}\pm t_{٠/٠٠٨٣٣;١٨}\sqrt{\frac{٢}{١٠}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^٢+\sum(y_i-\bar{y})^٢}{١٨}}\right]$$

$$=[-٧٢/٧٣,٣٩/٧٣٤]$$

حدود اطمینان برای z,x:

$$[L,U]=\left[\bar{x}-\bar{z}\pm t_{٠/٠٠٨٣٣;١٤}\sqrt{\frac{٢}{١٠}}\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^٢+\sum(z_i-\bar{z})^٢}{١٨}}\right]$$

$$=[٢١/٤١٧,٤٠/١٨٣]$$

حدود اطمینان برای z,y:

$$[L,U]=\left[\bar{y}-\bar{z}\pm t_{٠/٠٠٨٣٣;١٤}\sqrt{\frac{٢}{١٠}}\sqrt{\frac{\sum(y_i-\bar{y})^٢+\sum(z_i-\bar{z})^٢}{١٨}}\right]$$

$$=[٣٧/٨٤٢٥,٥٦/٧٥٧٥]$$

۸-۵۷) تصور کنید در مورد هر یک از سه طرز کار ۱۵ آزمایش انجام گیرد و واریانسهای نمونه به صورت $S_x^2=12$ و $S_y^2=30$ و $S_z^2=39$ ارائه شوند. حدود اطمینان توام ۸۵ درصدی برای همه نسبتهای زوجی واریانسها پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} S_x^2=12 \\ S_y^2=30 \\ S_z^2=39 \end{cases} \qquad \begin{cases} n_x=n_y=n_z=15 \\ \alpha_i=\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{0/15}{3}=0/05 \end{cases}$$

حدود اطمینان برای $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$:

$$[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_y}\sqrt{\frac{1}{F_{0/025;14,14}}},\frac{S_x}{S_y}\sqrt{F_{0/025;14,14}}\right]$$

$$=\left[0/632\sqrt{\frac{1}{2/983}},0/632\sqrt{2/983}\right]=[0/3659,1/0916]$$

حدود اطمینان برای $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_z}$:

$$[L,U]=\left[\frac{S_x}{S_z}\sqrt{\frac{1}{F_{0/025;14,14}}},\frac{S_x}{S_z}\sqrt{F_{0/025;14,14}}\right]$$

$$=\left[0/555\sqrt{\frac{1}{2/983}},0/555\sqrt{2/983}\right]=[0/3212,0/958]$$

حدود اطمینان برای $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_z}$:

$$[L,U]=\left[\frac{S_y}{S_z}\sqrt{\frac{1}{F_{0/025;14,14}}},\frac{S_y}{S_z}\sqrt{F_{0/025;14,14}}\right]$$

$$=\left[\cdot/\text{۸۷۷}\sqrt{\frac{\text{۱}}{\text{۲/۹۸۳}}},\cdot/\text{۸۷۷}\sqrt{\text{۲/۹۸۳}}\right]=[\cdot/\text{۵۰۷۸},\text{۱/۵۱۴۷}]$$

۸–۵۸) تصور کنید در مورد هر یک از چهار شیوه عمل ۲۰ آزمایش انجام گیرد و واریانسهای نمونه به صورت $S_x^2=\text{۲۵}$ و $S_y^2=\text{۴۰}$ و $S_z^2=\text{۶۰}$ و $S_w^2=\text{۸۵}$ ارائه شوند. یک حدود اطمینان همزمان ۹۴ درصدی برای همه نسبتهای زوجی واریانسها به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases}n_x=n_y=n_z=n_w=\text{۲۰}\\ \alpha_i=\frac{\alpha}{\text{۶}}=\frac{\cdot/\cdot\text{۶}}{\text{۶}}=\cdot/\cdot\text{۱}\end{cases}\qquad\begin{cases}S_x^2=\text{۲۵}\\ S_y^2=\text{۴۰}\end{cases}\qquad\begin{cases}S_z^2=\text{۶۰}\\ S_w^2=\text{۸۵}\end{cases}$$

حدود اطمینان برای $\frac{\sigma_i}{\sigma_j}$:

$$[L,U]=\left[\frac{S_i}{S_j}\sqrt{\frac{\text{۱}}{F_{\cdot/\cdot\cdot\text{۵};\text{۱۹},\text{۱۹}}}},\frac{S_i}{S_j}\sqrt{F_{\cdot/\cdot\cdot\text{۵};\text{۱۹},\text{۱۹}}}\right]$$

$$=\left[\frac{S_i}{S_j}\sqrt{\frac{\text{۱}}{\text{۳/۴۴}}},\frac{S_i}{S_j}\sqrt{\text{۳/۴۴}}\right]$$

این مسئله مانند مسئله قبل با جایگذاری مقادیر S مختلف بدست می آید.

۸–۵۹) در بازگشت به مساله ۳۲، یک فاصله اطمینان همزمان ۹۵ درصدی برای σ,μ پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha=\cdot/\cdot\text{۵}\\ \alpha_i=\frac{\alpha}{\text{۲}}=\cdot/\cdot\text{۲۵}\end{cases}\qquad\begin{cases}n=\text{۲۰}\end{cases}\qquad\begin{cases}\bar{x}=\cdot/\text{۷۹۰}\\ S=\cdot/\cdot\text{۱}\end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-t_{\frac{./.۲۵}{۲};۱۹}\frac{S}{\sqrt{۲۰}},\bar{x}+t_{\frac{./.۲۵}{۲};۱۹}\frac{S}{\sqrt{۲۰}}\right]$$:فاصله اطمینان برای μ

$$=\left[./۷۹۰-۲/٤٦۵\times\frac{./.۱}{\sqrt{۲۰}},./۷۹۰+۲/٤٦۵\times\frac{./.۱}{\sqrt{۲۰}}\right]=[./۷۸٤,./۷۹٦]$$

$$[L,U]=\left[S\sqrt{\frac{۱۹}{x^{۲}_{./.۱۲۵,۱۹}}},S\sqrt{\frac{۱۹}{x^{۲}_{./۹۸۷۵,۱۹}}}\right]$$:فاصله اطمینان برای σ

$$=\left[./.۱\sqrt{\frac{۱۹}{۳۲/٤.۸۵}},./.۱\sqrt{\frac{۱۹}{۷/۸٤۵}}\right]=[./..۷۵,./.۱۵٦]$$

۸–٦۰) در مساله ۱۷، عبارت مربوط به فاصله بیزی ۹۵ درصدی برای p را با این فرض پیدا کنید که توزیع پیشین در فاصله $[۰,۱]$ یکنواخت است. محاسبه انجام ندهید.

(راهنمایی: از نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ استفاده کنید.)

پاسخ:

$$P\{L\le p\le U\}=۱-\alpha=./۹۵$$

بر اساس نتایج مساله ۱۷ $\Rightarrow C=۲,D=۲\Rightarrow \hat{P}=\frac{\sum x_i+۲}{n+٤}$

$$[L,U]=\left[\hat{P}-k_{./.۲۵}\sqrt{\frac{\hat{P}(۱-\hat{P})}{n}},\hat{P}+k_{./.۲۵}\sqrt{\frac{\hat{P}(۱-\hat{P})}{n}}\right]$$

$$=\left[\frac{\sum x_i+۲}{n+٤}\pm ۱/۹٦\sqrt{\frac{\frac{\sum x_i+۲}{n+٤}\left(\frac{n+۲-\sum x_i}{n+۲}\right)}{n}}\right]$$

۸-٦۱) در مساله ۱۳، عبارت نشان دهنده یک فاصله بیزی ۹۰ درصدی برای λ را پیدا کنید. محاسبه انجام ندهید. (راهنمایی: از نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ استفاده کنید)

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha=\cdot/\text{۱}\cdot\\ \hat{\lambda}=\frac{\sum x_i}{n}=\bar{x}\end{cases}\qquad \begin{cases}C=\text{۱}\\ D\to+\infty\end{cases}\qquad \begin{cases}\sigma=\mu=\lambda\end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\hat{\lambda}-k_{\cdot/\text{۱}\cdot\text{۰}}\sigma_{\lambda},\hat{\lambda}+k_{\cdot/\text{۱}\cdot\text{۰}}\sigma_{\lambda}\right]$$

$$=\left[\bar{x}-\text{۱/٦٤۵}\bar{x};\bar{x}+\text{۱/٦٤۵}\bar{x}\right]=\left[-\cdot/\text{٦٤۵}\bar{x};\text{۲/٦٤۵}\bar{x}\right]$$

۸-٦۲) در مساله ۱٤، عبارت مربوط به یک فاصله بیزی ۹۹ درصدی برای λ را پیدا کنید. محاسبه نکنید. (راهنمایی: از نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ استفاده کنید.)

پاسخ:

$$\begin{cases}\mu=\sigma=\lambda\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha=\cdot/\cdot\text{۱}\\ \hat{\lambda}=\frac{\sum k_i+\text{۱}}{n+\text{۱}}\end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\hat{\lambda}-k_{\cdot/\cdot\cdot\text{۰}}\sigma_{\hat{\lambda}},\hat{\lambda}+k_{\cdot/\cdot\cdot\text{۰}}\sigma_{\hat{\lambda}}\right]$$

$$=\left[\frac{\sum x_i+\text{۱}}{n+\text{۱}}-\text{۲/۵۷۵}\times\frac{\sum x_i+\text{۱}}{n+\text{۱}},\frac{\sum x_i+\text{۱}}{n+\text{۱}}+\text{۲/۵۷۵}\times\frac{\sum x_i+\text{۱}}{n+\text{۱}}\right]$$

$$=\left[-\text{۱/۵۷۵}\frac{\sum x_i+\text{۱}}{n+\text{۱}},\text{۳/۵۷۵}\frac{\sum x_i+\text{۱}}{n+\text{۱}}\right]$$

۸-٦۳) در مساله ۱۵، عبارت مربوط به یک فاصله بیزی ۹۵ درصدی برای η را پیدا کنید. محاسبه نکنید. (راهنمایی: از نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ استفاده کنید.)

پاسخ:

$$\begin{cases} \hat{\eta} = \dfrac{n+1}{\sum x_i} \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma^2 = \theta^2 = \dfrac{1}{\eta^2} \\ \mu = \theta = \dfrac{1}{\eta} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-\alpha = 0/95 \\ \end{cases}$$

$$[L,U] = [\hat{\eta} - k_{0/025}\sigma_{\hat{\eta}}, \hat{\eta} + k_{0/025}\sigma_{\hat{\eta}}] = \left[\frac{n+1}{\sum x_i} \pm 1/96\sigma_{\hat{\eta}}\right]$$

$$\sigma_{\hat{\eta}}^2 = \frac{1}{\mu_\theta} + \frac{\sigma_\theta^2}{\mu_\theta^2} = \frac{n+1}{\sum x_i} + \frac{n+1}{\sum x_i} = \frac{2(n+1)}{\sum x_i}$$

$$\Rightarrow [L,U] = [\hat{\eta} - k_{0/025}\sigma_{\hat{\eta}}, \hat{\eta} + k_{0/025}\sigma_{\hat{\eta}}] = \left[\frac{n+1}{\sum x_i} \pm 1/96\sqrt{\frac{2(n+1)}{\sum x_i}}\right]$$

۸-٦٤) در مساله ١٦، عبارت مربوط به یک فاصله بیزی ۹۰ درصدی برای ηرا پیدا کنید. محاسبه نکنید. (راهنمایی: از نتایج ارائه شده در جدول ۱.۸ استفاده کنید.)

پاسخ:

عبارت مربوط به فاصله بیزی $[L,U] = [\hat{\eta} - k_{0/05}\sigma_{\hat{\eta}}, \hat{\eta} + k_{0/05}\sigma_{\hat{\eta}}]$

می دانیم برای $\mu_\theta = \sigma_\theta = \theta, \theta = \dfrac{1}{\eta}$ است، بنابراین داریم:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\eta}} = \frac{\sum x_i + 1}{n+1}$$

فاصله اطمینان مربوط به θ $[L,U] = \left[\dfrac{\sum x_i + 1}{n+1} \pm 1/96 \dfrac{\sum x_i + 1}{n+1}\right]$

$$\Rightarrow -0/96\frac{\sum x_i + 1}{n+1} \le \theta = \frac{1}{\eta} \le 2/96\frac{\sum x_i + 1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2/96}\frac{n+1}{\sum x_i + 1} \le \eta$$

$$\eta > ۰ \text{ فاصله بیزی برای } [L,U] = \left[\frac{۱}{۲/۹۶}\frac{n+۱}{\sum x_i + ۱}, +\infty\right)$$

۸-۶۵) در ساخت میله های استوانه ای با سطح مقطع مدور، که در داخل یک مادگی مدور قرار می گیرند، تمایل به یافتن فاصله تلرانس قطر وجود دارد. یک نمونه ۱۰ تایی با نتایج زیر گرفته می شود:

۵/۰۳۱	۵/۰۳۶
۵/۰۶٤	۵/۰۸۵
٤/۹٤۲	٤/۹۹۱
۵/۰۵۱	٤/۹۳۵
۵/۰۱۱	٤/۹۹۹

$$\sum (X_i - \overline{X})^۲ = ۰/۰۲۱۸۶۸۵ \qquad \overline{X} = ۵/۰۱٤۵$$

به ازای $\gamma = ۰/۹۵$ فاصله تلرانسی ۹۰ درصدی برای قطرها پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} n = ۱۰ \\ S = ۲/۸۳۹ \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{x} = ۵/۰۱٤۵ \\ \sum (x_i - \overline{x})^۲ = ۰/۰۲۱۸۶۸۵ \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = ۰/۹۵ \\ \alpha = ۰/۱۰ \end{cases}$$

$$[L,U] = [\overline{x} - k_{۰/۰۵}S, \overline{x} + k_{۰/۰۵}S]$$

$$= [۵/۰۱٤۵ - ۲/۸۳۹ \times ۱/٦٤۵, ۵/۰۱٤۵ + ۲/۸۳۹ \times ۱/٦٤۵]$$

$$= [۰/۳٤٤۳, ۹/٦۸۵]$$

۸-٦٦) مشاهدات زیر مربوط به حجم خالص بطریها بر حسب لیترند:

۵/٦٦	۵/٦٤	۵/۵۹	۵/٦۵	۵/٦۸

۵/۶۱	۵/۶۲	۵/۶۴	۵/۶۳	۵/۶۱
۵/۶۴	۵/۶۶	۵/۶۰	۵/۶۵	۵/۶۳
۵/۶۷	۵/۶۴	۵/۶۰	۵/۶۰	۵/۶۵
۵/۶۰	۵/۶۵	۵/۶۰	۵/۶۳	۵/۶۰

$$\bar{X}=5/63 \qquad \sum(X_i-\bar{X})^2=0/19605$$

یک فاصله حجمی پیدا کنید که به ازای $\gamma=0/95$ دست کم ۹۹ درصد از بطریها را در بر گیرد.

پاسخ:

$$\begin{cases}\bar{x}=5/63\\ \sum(x_i-\bar{x})^2=0/19605\end{cases} \qquad \begin{cases}1-\alpha=0/99\\ \gamma=0/95\end{cases} \qquad \begin{cases}n=25\\ S=\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=8/169\times10^{-3}\end{cases}$$

$$[L,U]=\left[\bar{x}-k_{\frac{\alpha}{2}}S,\bar{x}+k_{\frac{\alpha}{2}}S\right]=[5/63-2/575\times3/457,5/63+2/575\times3/457]$$

$$=[-3/272,14/53]$$

۸–۶۷) یک نمونه متشکل از ۴۰ مشاهده از زمان احتراق خرج انفجاری موشک با نتایج $\bar{T}=0/250$ ثانیه و $S_T^2=0/0132$ گرفته شده است. به ازای $\gamma=0/99$، فاصله ای را پیدا کنید که دست کم ۹۰ درصد زمانها را در بر گیرد.

پاسخ:

$$\begin{cases}\gamma=0/99\\ \alpha=0/10\end{cases} \qquad \begin{cases}\bar{T}=0/250\\ S_T^2=0/0132\end{cases} \qquad \begin{cases}n=40\end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{T}-k_{0/05}S,\bar{T}+k_{0/05}S]$$

$$[\text{۰/۲۵۰} - \text{۲/۲۵۷} \times \text{۱/۹۶}, \text{۰/۲۵۰} + \text{۲/۲۵۷} \times \text{۱/۹۶}] = [-\text{۴/۱۷۳۷۲}, \text{۴/۶۷۳۷۲}]$$

۸-۶۸) در اندازه گیری درصد تقلیل وزن گل رس کوزه گری در اثر خشک شدن، ۴۰ نمونه از گل رس نتایج زیر را پدید آورد:

۱۷/۳	۱۷/۹	۲۰/۵	۱۹/۳
۱۹/۵	۱۷/۱	۱۶/۹	۱۵/۸
۱۹/۱	۲۲/۵	۱۸/۵	۲۰/۷
۱۷/۵	۱۸/۸	۱۸/۷	۱۸/۴
۱۶/۸	۱۹/۴	۱۲/۳	۱۴/۹
۱۶/۳	۱۷/۴	۱۹/۵	۱۷/۳
۱۹/۰	۱۸/۵	۲۳/۴	۲۱/۳
۱۸/۲	۱۷/۵	۱۸/۸	۱۶/۱
۱۷/۴	۱۶/۵	۱۸/۳	۱۸/۶
۱۸/۲	۱۷/۵	۱۶/۹	۲۰/۵

$$\sum (X_i - \bar{X})^{\text{۲}} = \text{۱۵۴/۱۶} \qquad \bar{X} = \text{۱۸/۲۲۷۵}$$

فاصله ای پیدا کنید که با احتمال ۰/۹۹ دست کم ۷۵ درصد محصول را در بر گیرد.

پاسخ:

$$\begin{cases} S = \text{۱/۵۷۱} \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x} = \text{۱۸/۲۲۷۵} \\ n = \text{۴۰} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \text{۰/۲۵} \\ \gamma = \text{۰/۹۹} \end{cases}$$

$$[L, U] = [\bar{x} - k_{\text{۰/۱۲۵}} S, \bar{x} + k_{\text{۰/۱۲۵}} S]$$

$$=[۱۸/۲۲۷۵-۱/۵۷۱\times۱/۱۵,۱۸/۲۲۷۵+۱/۵۷۱\times۱/۱۵]=[۱۶/٤۲۱,۲۰/۰۳٤]$$

۸-٦۹) در ساخت قطعات ریخته گری مورد استفاده در آخرین قطعات بال هواپیما، حد پایین عرض شکاف بعدی مهم شمرده می شود. ارائه حد پایین مشخصی مورد نیاز است که با احتمال ۰/۹۵ تضمین می کند که دست کم ۹۹ درصد از عرض شکافها در بالای این حد قرار می گیرند. نمونه ای از ۳۰ قطعه ریختگی گرفته شد و میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۰/۸۷۵۰ و ۰/۰۰۲۵اینچ به دست آمد. حد تلرانس مطلوب را پیدا کنید. به منظور تعیین فاصله تلرانس ناپارامتری با این خصوصیات به چند مشاهده نیاز است؟

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha=۰/۰۱\\ \gamma=۰/۹۵\end{cases}\qquad\begin{cases}\bar{x}=۰/۸۷۵۰\\ n=۳۰\end{cases}\qquad\begin{cases}S=۲/۲۲۰\\ S_x=۰/۰۰۲۵\end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{x}-k_{۰/۰۱}S,+\infty)=[۰/۸۷۵۰-۲/۲۲۰\times۲/۳۲,+\infty)=[-٤/۲۷۵,+\infty)$$

۸-۷۰) با داده های مساله ٦٦، یک حد پایین تلرانس پیدا کنید که با احتمال ۰/۹۵ دست کم ۹۹ درصد حجم از آن بیشتر شود. برای یک فاصله تلرانس ناپارامتری با این خصوصیات چند مشاهده مورد نیاز است؟

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha=۰/۰۱\\ \gamma=۰/۹۵\end{cases}\qquad\begin{cases}\bar{x}=۵/٦۳\\ n=۲۵\end{cases}\qquad\begin{cases}S=۳/۱۵۸\\ \end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{x}-k_{۰/۰۱}S,+\infty]=[۵/٦۳-۲/۳۲\times۳/۱۵۸,+\infty]=[-۱/٦۹۷,+\infty]$$

۸-۷۱) با داده های مساله ٦۸، چنان حد بالای تلرانسی پیدا کنید کـه بـا احتمـال ۰/۹۹ دست کم ۷۵ درصد محصول کمتر از آن باشد.

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha=\cdot/\text{۲۵}\\ \gamma=\cdot/\text{۹۹}\end{cases}\qquad \begin{cases}\bar{x}=\text{۱۸/۲۲۷۵}\\ n_x=\text{٤۰}\end{cases}\qquad \begin{cases}S=\text{۱/۱۵٤}\end{cases}$$

$$[L,U]=(-\infty,\bar{x}+k_{\cdot/\text{۲۵}}S]=(-\infty,\text{۱۸/۲۲۷۵}+\text{۱/۱۵٤}\times\cdot/\text{٦۸}]=(-\infty,\text{۱۹/۰۱۲۲}]$$

۸-۷۲) فرض کنید در یک نمونه متشکل از ۳۰۰ مشـاهده، بزرگتـرین مشـاهده ۲۱/۷ و کوچکترین مشاهده ۱۸/۲ است. اگر فاصله ای مورد نظر باشد که دست کم ۹۹ درصد محصول را بپوشاند، چه احتمالی را می توان متنـاظر بـا فاصـله ۱۸/۲ تـا ۲۱/۷ قـرار داد؟

پاسخ:

$$\begin{cases}n=\text{۳۰۰}\\ \alpha=\cdot/\cdot\text{۱}\end{cases}$$

$$[L,U]=[\bar{x}-k_{\cdot/\cdot\cdot\text{۵}}S,\bar{x}+k_{\cdot/\cdot\cdot\text{۵}}S]=[\text{۱۸/۲},\text{۲۱/۷}]$$

$$U-L=\text{۲}k_{\cdot/\cdot\cdot\text{۵}}S=\text{۲}\times\text{۲/۵۷۵}S=\text{۲۱/۷}-\text{۱۸/۲}=\text{۳/۵}$$

$$S=\cdot/\text{٦۸}\quad\Rightarrow\quad\gamma\approx\text{۹۰/۵}$$

۸-۷۳) در زیر بخش ۲.٤.۸، در مورد تلرانسهای یک طرفه بـرای توزیعهـای نرمـال بـا میانگین و واریانس مجهول، ضرایب K، به صورت تابعی از n معرفی شدند که

$$P\left\{\int_{\bar{X}-KS}^{\infty}\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}\pi}\sigma}e^{-(z-\mu)^{\text{۲}}/\text{۲}\sigma^{\text{۲}}}dz\geq\text{۱}-\alpha\right\}=\gamma$$

باشد؛ یعنی، با احتمال γ، دست کم درصدی مثل $1-\alpha$ از توزیع بزرگتر از $\overline{X}-KS$ باشد. فرض کنید σ معلوم است. ضریبی مانند K' را چنان به دست آورید که به ازای $n=16$، این احتمال که دست کم ۹/۱۰ از توزیع از $\overline{X}-K'\sigma$ بیشتر شود ۰/۹۵ باشد؛ به عبارت دیگر، K' را چنان بیابید که رابطه زیر صادق باشد:

$$P\left\{\int_{\overline{X}-K'S}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}dz \geq 0/9\right\}=0/95$$

پاسخ:

$$\begin{cases}\alpha=0/10\\ \gamma=0/95\end{cases}\qquad \begin{cases}n=16\\ \end{cases}\qquad \Rightarrow\quad k'=2/032$$